

# **DINÂMICA DOS OCEANOS**

**NOTAS DE AULA DO CURSO DE  
GRADUAÇÃO DA FURG**

**PROFESSOR IVAN SOARES**

18 de Março de 2004

# DINÂMICA DOS OCEANOS

por Ivan Soares

## Bibliografia Básica:

- Adrian E. Gill 1982 *Atmosphere - Ocean Dynamics*  
Ed. Academic Press.
- J. G. Harvey 1976 *Atmosphere and Ocean - Our Fluid Environment*  
Ed. The Artemis Press (Open University Collection).
- J. P. Apel 1987 *Principles of Physical Oceanography*  
Ed. Academic Press.
- J. Brown et al 1982 *Ocean Circulation*  
Ed. Pergamon Press (Open University Collection).
- Stephen Pond & George L. Pickard 1978 *Introductory Dynamic Oceanography*  
Ed. Pergamon Press.
- A. H. Perry & J. M. Walker 1977 *The Ocean - Atmosphere System*  
Ed. Longman
- B. M. Castro 1990 *Física dos Oceanos*  
Notas de aula do curso de mestrado no IOUSP.
- E. Campos 1991 *Modelos Oceânicos*  
Notas de aula do curso de mestrado no IOUSP.

# Conteudo

<b>1</b>	<b>O Sistema Oceano-Atmosfera</b>	<b>3</b>
1.1	A Radiação Solar . . . . .	3
1.1.1	Transmissão da Radiação Solar Através da Atmosfera . . . . .	11
1.2	Modelo de Equilíbrio de Radiação do Sistema Oceano-Atmosfera . . . . .	12
1.3	O Efeito Estufa . . . . .	13
1.4	O Efeito dos Movimentos Convectivos no Balanço Radiativo . . . . .	14
1.5	O Efeito dos Movimentos Advectivos . . . . .	16
1.5.1	Circulação Atmosférica . . . . .	16
1.5.2	Os Centros de Alta e Baixa Pressões . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Transferência de Propriedades entre o Oceano e a Atmosfera</b>	<b>25</b>
2.1	Contraste nas Propriedades dos Meios Ar e Água . . . . .	25
2.2	A Transmissão da Radiação Solar na Água do Mar . . . . .	26
2.3	A Influência dos Oceanos no Clima Terrestre . . . . .	27
2.4	Transferência de Momento entre o Oceano e a Atmosfera. . . . .	27
2.4.1	Circulação Oceânica Superficial . . . . .	27
2.5	A Camada de Ekman . . . . .	29
2.5.1	A Camada de Ekman no Oceano . . . . .	31
2.6	Variações nas Taxas de Transferência . . . . .	32
<b>3</b>	<b>O Balanço Térmico dos Oceanos</b>	<b>36</b>

3.1	Equações para Cálculo do Balanço de Calor . . . . .	37
3.2	Evaporação (Fluxo de Calor Latente) . . . . .	40
3.3	Fluxo de Calor Sensível . . . . .	40
<b>4</b>	<b>As Forças que Atuam nos Oceanos</b>	<b>42</b>
4.1	Força de Atração Gravitacional . . . . .	44
4.1.1	Força Peso (Gravidade) . . . . .	44
4.2	Força do Gradiente de Pressão . . . . .	46
4.3	Força de Atrito . . . . .	48
4.4	Forças Centrífuga e de Coriolis . . . . .	52
4.4.1	Movimento Relativo de Translação Uniforme . . . . .	52
4.4.2	Movimento Relativo de Rotação Uniforme . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Leis de Conservação das Propriedades da Água do Mar</b>	<b>58</b>
5.1	Equação da Conservação da Massa . . . . .	59
5.1.1	Fluxo de Massa . . . . .	59
5.1.2	Variação Interna . . . . .	61
5.2	Equação da Conservação do Momento . . . . .	62
5.3	Equações de Conservação Complementares . . . . .	64
5.3.1	Conservação de Sal . . . . .	64
5.3.2	Conservação de Calor . . . . .	66
5.4	Conservação da Energia Cinética . . . . .	67
5.5	Aproximações . . . . .	68
<b>6</b>	<b>A Escala dos Processos Oceânicos</b>	<b>71</b>
6.1	Processos Turbulentos nos Oceanos . . . . .	71
6.2	Análise de Escala dos Processos Oceânicos . . . . .	78
6.2.1	Adimensionalização das Variáveis . . . . .	80

6.2.2	Números de Froude, Ekman e Rossby . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Correntes Oceânicas sem Fricção</b>	<b>89</b>
7.1	Fluxo Geostrófico . . . . .	90
7.1.1	Dinâmica do Fluxo Geostrófico . . . . .	91
7.2	Fluxo Inercial . . . . .	93
7.3	A equação do Vento Térmico . . . . .	95
7.4	O Método Dinâmico em Oceanografia . . . . .	96
<b>8</b>	<b>Vorticidade</b>	<b>101</b>
8.1	Vorticidade Relativa . . . . .	101
8.2	Vorticidade Planetária . . . . .	102
8.3	Equação da Vorticidade . . . . .	104
8.4	Conservação de vorticidade potencial . . . . .	108
<b>9</b>	<b>Correntes Oceânicas com Fricção</b>	<b>112</b>
9.1	Circulação Dirigida pelo Vento . . . . .	112
9.1.1	A Teoria de Ekman . . . . .	113
9.1.2	Analisando as equações de Ekman . . . . .	116
9.1.3	Interpretando as Soluções para Camada de Ekman Superficial . . . . .	118
9.1.4	A Espiral de Ekman no Fundo . . . . .	119
9.1.5	Equações para a Camada de Ekman de Fundo . . . . .	121
9.2	O Modelo de Sverdrup para a Circulação Gerada pelo Vento . . . . .	121
9.3	O modelo de Stommel . . . . .	125
9.3.1	Solução do Modelo de Stommel . . . . .	126
9.4	O Modelo de Munk . . . . .	128
9.4.1	Solução da Equação de Munk . . . . .	128
9.5	A Intensificação das Correntes Oeste Explicada por Conservação de Vorticidade.	132

<b>10 Circulação Termohalina dos Oceanos</b>	<b>133</b>
10.1 Equações de conservação de sal e calor para oceano estacionário . . . . .	134
10.2 A circulação do Oceano Abissal . . . . .	136
10.2.1 O modelo de Stommel e Arons . . . . .	138
<b>11 Ondas influenciadas pela rotação da Terra.</b>	<b>143</b>
11.1 Equações das ondas influenciadas por rotação . . . . .	144
11.2 Ondas de Rossby . . . . .	149
11.3 Ondas de Kelvin . . . . .	149
<b>A Tópico Especial: Revisão de Cálculo e Álgebra Vetorial</b>	<b>i</b>
A.1 Campos escalares e vetoriais . . . . .	i
A.2 Derivadas totais e parciais . . . . .	i
A.3 Os Sistemas Lagrangeano e Euleriano . . . . .	iii
A.4 O operador Nabla ( $\nabla$ ) . . . . .	iii
A.5 Cálculo da velocidade vertical a partir do campo horizontal de corrente . . .	vii
<b>B Equação da vorticidade</b>	<b>ix</b>
B.1 Derivação da equação da vorticidade . . . . .	ix
<b>C Revisão da Teoria de Onda</b>	<b>xiii</b>
C.1 Parâmetros de onda . . . . .	xiii

# Lista de Figuras

1.1	<i>Irradiância solar total diária</i> . . . . .	6
1.2	<i>Radiação de um corpo negro</i> . . . . .	8
1.3	<i>Incidência dos raios solares na Terra sem inclinação</i> . . . . .	9
1.4	<i>Incidência dos raios solares na Terra com inclinação</i> . . . . .	10
1.5	<i>Radiação de um corpo escuro com temperatura de 285 k</i> . . . . .	14
1.6	<i>Efeito Estufa</i> . . . . .	15
1.7	<i>Diagrama esquemático da circulação do ar nas células de Walker</i> . . . . .	16
1.8	<i>Sistema de convecção atmosférica para uma Terra hipotética, não rotatória</i> .	17
1.9	<i>Células de circulação atmosféricas em torno de uma Terra rotatória hipotética, totalmente coberta de água.</i> . . . . .	18
1.10	<i>Desenho esquemático da circulação atmosférica meridional (N-S).</i> . . . . .	19
1.11	<i>Padrão idealizado de ventos na Terra</i> . . . . .	20
1.12	<i>Centros de alta e baixa pressão em um planeta não rotatório</i> . . . . .	21
1.13	<i>Centros de alta e baixa pressão em um planeta não rotatório - HS</i> . . . . .	22
1.14	<i>Centros de alta e baixa pressão em um planeta não rotatório - HN</i> . . . . .	23
2.1	<i>Balanco de radiação na atmosfera</i> . . . . .	26
2.2	<i>Circulação induzida pelo vento na superfície dos oceanos</i> . . . . .	28
2.3	<i>Perfil vertical de corrente de um fluido em movimento laminar.</i> . . . . .	30
2.4	<i>Perfil vertical de corrente de um fluido em movimento turbulento.</i> . . . . .	30
2.5	<i>Camada de Ekman superficial dos oceanos</i> . . . . .	31

2.6	<i>Posição dos centros de AP e ventos no oceano Atlântico - verão</i> . . . . .	33
2.7	<i>Posição dos centros de AP e ventos no oceano Atlântico - inverno</i> . . . . .	34
4.1	<i>Pressões exercidas nas faces do elemento de volume <math>dv</math> na direção <math>x</math>.</i> . . . . .	47
4.2	<i>Tensores de Reynolds nas faces do elemento de volume <math>dv</math>.</i> . . . . .	51
4.3	<i>Movimento relativo de translação uniforme</i> . . . . .	53
4.4	<i>Movimento relativo de rotação uniforme</i> . . . . .	54
5.1	<i>Fluxo de massa nas faces do elemento <math>dv</math>.</i> . . . . .	60
7.1	<i>Fluxo geostrófico - Vista Lateral</i> . . . . .	91
7.2	<i>Fluxo geostrófico - Vista Superior</i> . . . . .	92
7.3	<i>Sistema de coordenadas naturais</i> . . . . .	94
7.4	<i>Perfis verticais de densidade nas estações A e B.</i> . . . . .	99
8.1	<i>Rotação de um disco rígido</i> . . . . .	102
8.2	<i>Vetor velocidade angular da Terra e suas componentes</i> . . . . .	103
8.3	<i>Tubo de vortice</i> . . . . .	105
8.4	<i>Circulação divergente e ação da força de Coriolis.</i> . . . . .	107
8.5	<i>Campo de densidade se ajustando ao campo de pressão</i> . . . . .	107
8.6	<i>Campo de corrente cisalhado e as tendências rotacionais.</i> . . . . .	108
8.7	<i>Vista lateral da coluna d'água no modelo de águas rasas.</i> . . . . .	109
9.1	<i>Espiral de Ekman no fundo - vista lateral</i> . . . . .	120
9.2	<i>Espiral de Ekman no fundo - vista superior</i> . . . . .	120
9.3	<i>Dominio retangular do modelo de Sverdrup.</i> . . . . .	124
9.4	<i>Linhas de correntes no modelo de Sverdrup</i> . . . . .	126
9.5	<i>Linhas de corrente segundo o modelo de Stommel</i> . . . . .	129
9.6	<i>Função <math>\chi</math> no modelo de Munk</i> . . . . .	130



9.7	<i>Função de corrente segundo Munk para <math>\beta = 0</math></i>	131
9.8	<i>Função de corrente segundo Munk para <math>\beta \neq 0</math></i>	131
10.1	<i>Modelo de circulação abissal para o Atlântico Norte.</i>	141
10.2	<i>Circulação abissal dos oceanos segundo Stommel e Arons (1958).</i>	142
11.1	<i>Ondas longas sobre a topografia do fundo.</i>	146
A.1	<i>Padrão de correntes no oceano Pacífico descrito pelo métodos a) Lagrangeano e b) Euleriano.</i>	iv
C.1	<i>Desenho esquemático de uma onda de gravidade mostrando os parâmetros de onda. Vista Lateral (painel superior) e vista superior (painel inferior).</i>	xv

# Lista de Tabelas

1.1	<i>Albedo (<math>\alpha</math>) para diferentes tipos de superfícies encontradas na Terra. Fonte: Harvey, 1976. . . . .</i>	12
3.1	<i>Variação da pressão de vapor d'água de saturação em função da temperatura. . . . .</i>	39
7.1	<i>Densidade e volume específico nas estações A e B, por extrato. . . . .</i>	98
7.2	<i>Volume específico médio de cada extrato, diferença de volumes específicos médios entre as duas estações e velocidades de cada extrato. . . . .</i>	100

## Nota ao Estudantes

O estudo da **Dinâmica dos Oceanos** implica em, como o próprio nome já diz, estudar o movimento das águas oceânicas preocupando-se com a(s) causa(s) deste. Lembramos da Física Básica que a Dinâmica trata do estudo do movimento levando em consideração as forças que o geram e modificam, diferentemente da Cinemática que estuda o mesmo sem se preocupar com sua origem. Lembramos também que *força* é o nome que damos para a *interação* de um corpo com sua vizinhança. Estaremos, portanto, nos preocupando com *como as interações do oceano com os ambientes vizinhos estão causando e modificando os movimentos do mesmo*.

“*Como e porque os oceanos se movem?*” é a grande pergunta do curso, e em segundo lugar “*Qual o grau de previsibilidade dos movimentos oceânicos?*”

Pretende-se no desenrolar do curso esclarecer como atuam os processos físicos envolvidos na circulação dos oceanos. Entendemos por *vizinhança dos oceanos* os astros celestes próximos da Terra, a atmosfera e a própria Terra, ou seja, os continentes e o fundo oceânico. Diversos processos, com diferentes graus de atuação e diferentes escalas de ocorrência, estão envolvidos na interação do oceano com estes ambientes, gerando por sua vez, diferentes movimentos, cada qual com frequência e período típicos, abrangendo desde microescala até a escala global. Alguns movimentos são particularmente importantes:

- a) **os movimentos gerados por interação gravitacional dos oceanos com alguns astros**, denominados de maré astronômica e gerados principalmente por interação com a Lua e o Sol.
- b) **os movimentos gerados por atuação dos ventos na superfície dos oceanos**, dentre os quais incluem-se as ondas superficiais e as correntes oceânicas superficiais.
- c) **os movimentos gerados por gradientes de densidade**, que ocorrem em larga escala nos oceanos devido as diferenças de absorção da radiação solar.

As ondas de pequena escala são abordadas no estudo das *Ondas Gravitacionais*. As correntes oceânicas geradas pela atuação do vento são um movimento especialmente importante, denominado *Circulação Dirigida pelo Vento*. As correntes geradas por gradiente de densidade são assunto da *Termodinâmica dos Oceanos*. As ondas de larga escala, aquelas influenciadas pela rotação da Terra, são um capítulo a parte no estudo do movimento. Finalmente, as Marés são tão características e particulares que são estudadas a parte, como um movimento independente. Em Dinâmica dos Oceanos veremos a circulação dirigida pelo vento, as ondas de larga escala e os movimentos termodinâmicos denominados de *Circulação Termohalina dos Oceanos*. Nestes movimentos abordados pelo curso o Sol é a principal forçante, pois são as diferenças nas taxas de absorção e reflexão da radiação solar que geram os gradientes de densidade na água e os gradientes de densidade no ar, causadores dos ventos.

O movimento será representado através de equações que expressam o balanço das forças atuantes no oceano. Cada processo é representado por uma força, a qual atua de modo a gerar variações nas taxas de ocorrência do movimento (aceleração) ou , em equilíbrio com outras forças, de modo a manter o oceano em estado inercial (sem aceleração). As leis básicas

de Newton em conjunto com leis de conservação das propriedades da água do mar serão utilizadas para representar e descrever o movimento. O principal objetivo de se representar os movimentos do oceano através de equações é a elaboração de modelos matemáticos e a previsão da evolução dos mesmos.

Difícilmente todos os processos envolvidos na origem dos movimentos e das oscilações nas taxas de ocorrência dos mesmos podem ser modelados e previstos. Historicamente a modelagem matemática dos processos oceanográficos se desenvolveu paulatinamente, isto é, os primeiros autores a estudar o assunto consideraram apenas uma única, ou algumas poucas, forçante(s) e descreveram o(s) movimento(s) resultante(s). Obviamente os resultados se adequaram as situações em que a(s) forçante(s) considerada(s) fosse(m) dominante(s). *Na natureza existem sempre diversos processos ocorrendo ao mesmo tempo, porém em diversas situações um deles é dominante. Portanto não consegue-se modelar 100 % dos movimentos, mas apenas uma parte, que será tanto mais representativa quanto maior a dominância dos processos considerados.* E, aos poucos, mais forçantes foram consideradas na tentativa de descrever o movimento de modo mais completo. Muitos modelos foram elaborados, por diversos autores, para estudar a circulação dirigida pelo vento e os movimentos termohalinos (resultantes dos gradientes de densidade). Veremos os principais aspectos destes modelos e os principais autores.

# Capítulo 1

## O Sistema Oceano-Atmosfera

Como primeira aproximação estudaremos os oceanos como parte de um sistema, denominado **Oceano-Atmosfera**, o qual será tratado como uma capa fluida envolvendo o planeta Terra. Delimita-se o conjunto formado pelos ambientes atmosférico e oceânico como o sistema dentro do qual se resolverá os processos a serem estudados; portanto todos os processos que ocorram fora deste sistema são responsáveis pelas fontes ou sumidouros de matéria ou energia do sistema. Inicialmente estudaremos esta capa fluida desconsiderando a presença dos continentes, e posteriormente estudaremos o efeito destes. A principal fonte de energia do Sistema Oceano-Atmosfera é o Sol, através do seu calor. Desconsidera-se pequenas fontes de calor provenientes do espaço, sob outras formas que não a radiação solar, e do interior da Terra, através de erupções na crosta terrestre, as quais podem causar movimento quando ocorrem no fundo oceânico. Basicamente podemos dizer que a radiação solar pode causar movimento nos oceanos de duas formas:

1. A absorção diferenciada da radiação solar pelos gases e partículas da atmosfera gera gradientes de densidade no ar, os quais geram os ventos, que por sua vez agem sobre a superfície do oceano causando as correntes oceânicas.
2. A absorção diferenciada da radiação solar pelos oceanos gera gradientes latitudinais de densidade no mar, os quais geram correntes (fluxos de densidade).

### 1.1 A Radiação Solar

Toda a radiação solar é proveniente de reações atômicas (fusão de núcleos de hidrogênio formando hélio) que ocorrem a todo instante no núcleo do Sol. Para fins práticos o sol pode ser considerado como um “corpo negro”<sup>1</sup> com temperatura superficial de 5.900 K. A energia solar é emitida na forma de radiação eletromagnética. A quantidade total de radiação emitida por unidade de área da superfície solar ( $E$ ) pode ser estimada pela *lei de Stefan* (equação 1.1)

---

<sup>1</sup>corpo perfeito em termos de emissão e absorção de radiação, com reflexão zero, ou seja, toda a radiação que chega até ele é absorvida.

$$E = \gamma.T^4 \quad W.m^{-2} \quad (1.1)$$

onde:

$\gamma$  é a constante de Stefan-Boltzmann =  $5.67 \times 10^{-8} \quad W.m^{-2}.K^{-4}$ ;

$T$  é a temperatura na superfície do sol medida em graus Kelvin (K);

$W$  é a unidade de medida de energia (Watt);

$m$  é a unidade de medida de distância (metro).

$E$  é um parâmetro que não varia com o tempo, a qualquer momento a emissividade na superfície do sol é aproximadamente a mesma, pois a todo momento reações nucleares estão ocorrendo no sol. Esta radiação viaja pelo espaço e, até chegar na Terra, sofre uma atenuação que é proporcional a distância percorrida. A este valor já atenuado chamamos de *Insolação* ( $S$ ). No topo da atmosfera da Terra a irradiância solar média teórica ou insolação média ( $\bar{S}$ ) é calculada pela equação 1.2.

$$\bar{S} = E \cdot \frac{R_s^2}{R_T^2} = 1.487,00 \quad W.m^{-2} \quad (1.2)$$

onde:

$R_s$  é o raio solar médio =  $6,96 \times 10^8 m$

$R_T$  é o raio médio da órbita da Terra em torno do Sol =  $1,49598 \times 10^{11} m$ .

Esta atenuação é calculada dividindo-se a área de uma esfera de raio  $R_s$  pela área de uma esfera de raio  $R_T$ , pois a energia que deixa a superfície do Sol espalha-se radialmente até chegar a Terra. Estes valores são teóricos, na realidade o valor correto no topo da atmosfera, conhecido como *Constante Solar*, determinado a partir de observação, é:

$$\bar{S} = 1.376,00 \quad W.m^{-2} \quad (1.3)$$

Este valor é um pouco menor que o valor teórico, pois o Sol não comporta-se exatamente como corpo negro perfeito. Este é o valor de radiação recebida, por unidade de área, por uma superfície colocada perpendicularmente ao Sol, à uma distância equivalente ao raio médio da órbita da Terra, sem considerar o efeito da atmosfera. É tido como constante pois a emissividade do Sol é praticamente constante. No entanto, trata-se de um valor médio, pois existem pequenas variações, dado que o raio da órbita da Terra não é constante. As variações na constante solar causadas pela elipsidade da órbita da Terra estão em torno de  $\pm 3.5 \%$  no valor de  $\bar{S}^2$ .

---

<sup>2</sup>Só recentemente tornou-se possível determinar se a constante solar é realmente constante, devido ao lançamento de Satélites com sensores aptos a medir a radiação solar. Mesmo assim a calibração desses sensores é complicada e demorada.

Se não existisse a atmosfera ao redor da Terra a quantidade de radiação solar recebida, por unidade de área da superfície terrestre, em 1 dia, dependeria de 3 fatores:

1. O tempo que a área fica exposta aos raios solares;
2. O ângulo que os raios solares fazem com a superfície da Terra;
3. A distância entre a Terra e o Sol.

Os dois primeiros fatores dependem da latitude em que se encontra a área em questão e o terceiro fator depende da época do ano. A figura 1.1 mostra a variação anual e latitudinal do total de radiação solar diária em  $cal/cm^2$ , incluindo a declinação solar. Note que o máximo de radiação do verão aumenta com o aumento de latitude, mas por causa do decréscimo mais rápido dos valores de inverno a média anual diminui com o aumento de latitude.

Em um dado instante a quantidade total de radiação solar recebida pela Terra corresponde a energia que receberia um disco de raio igual ao raio médio da Terra, disposto perpendicularmente aos raios solares, a uma distância equivalente ao raio médio da órbita terrestre (equação 1.4).

$$S_{tot} = \pi \cdot \bar{R}_t^2 \cdot \bar{S} \quad kW \quad (1.4)$$

onde:

$\bar{R}_t$  é o raio médio da Terra.

$\pi \cdot \bar{R}_t^2$  é a área do disco da Terra.

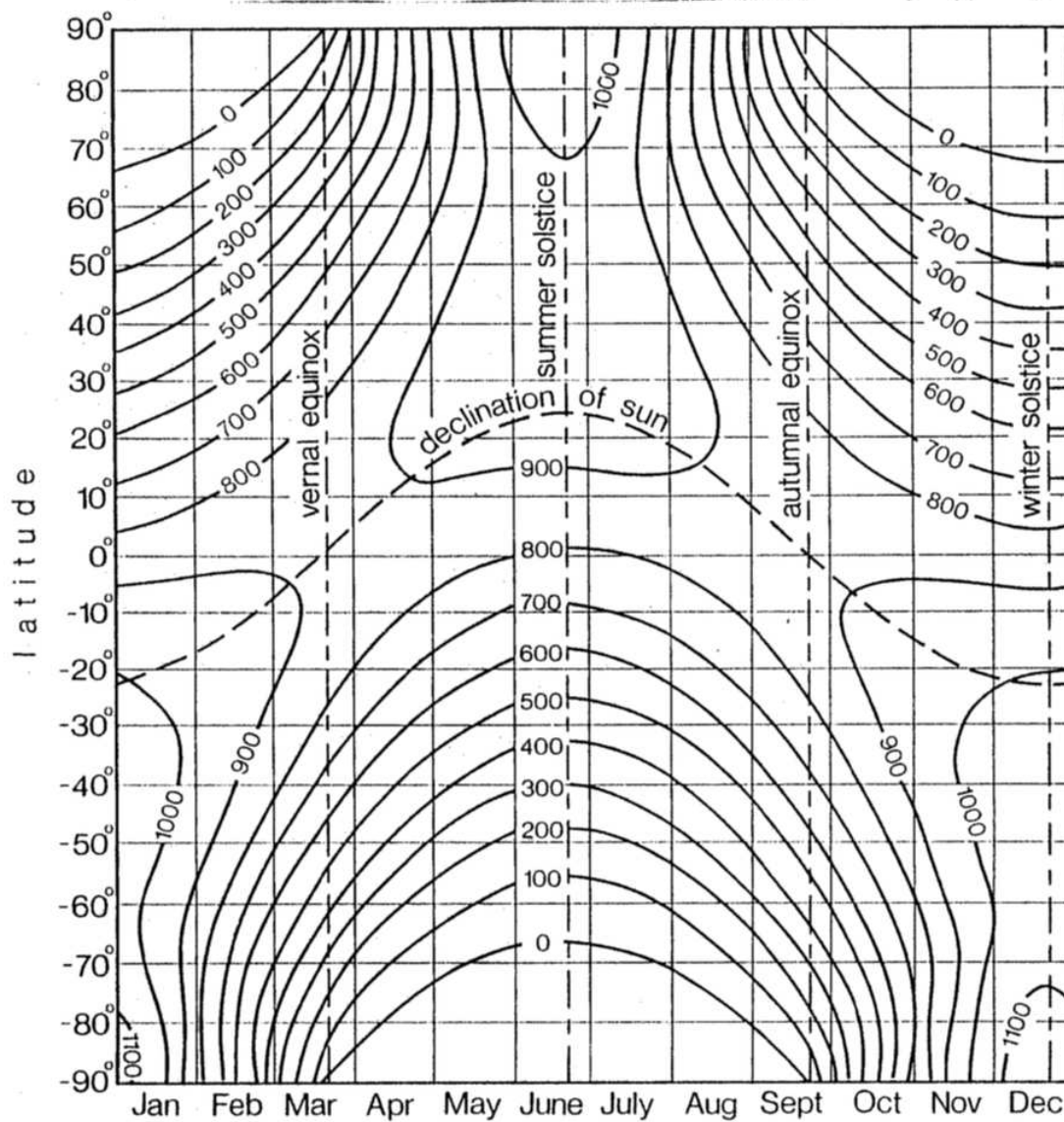


Figura 1.1: Irradiância solar total diária em  $\text{cal}/\text{cm}^2$  em função da latitude e das estações do ano, que seria recebida na superfície da Terra se não houvesse atmosfera. Fonte: Harvey (1976).



No entanto, esta energia apesar de estar sendo recebida apenas na face iluminada da Terra é distribuída por toda sua superfície, portanto a energia por unidade de área em um dado instante é calculada da seguinte forma: divide-se a quantidade total de energia recebida neste instante ( $S_{tot}$ ) pela área da superfície terrestre ( $4.\pi.\bar{R}_t^2$ ), conforme mostra a equação 1.5.

$$\frac{S_{tot}}{4.\pi.\bar{R}_t^2} = \frac{\pi.\bar{R}_t^2}{4.\pi.\bar{R}_t^2}.\bar{S} = \frac{1}{4}.\bar{S} = 344 \quad W.m^{-2} \quad (1.5)$$

Porém, parte da insolação recebida é refletida pela superfície da Terra e pelas nuvens, gases e partículas da atmosfera. A razão da radiação solar refletida ( $R_r$ ) pela radiação solar incidente ( $R_i$ ) é conhecida por albedo ( $\alpha$ ) (equação 1.6). O albedo médio terrestre está em torno de 30 %.

$$\alpha = \frac{R_r}{R_i} = 0,3 \quad (1.6)$$

Portanto o cálculo resultante da radiação recebida pela Terra, por instante, por unidade de área, leva em consideração o albedo médio da Terra (equação 1.7).

$$R_{res} = \frac{1}{4}.\bar{S}.(1 - \bar{\alpha}) = 240.8 \quad W.m^{-2} \quad (1.7)$$

*“Esta é a energia que é responsável pela temperatura média da Terra.”*

Esta energia chega na Terra distribuída em diversos comprimentos de onda, desde ultravioleta até infravermelho, passando pela luz visível, conforme mostra a figura 1.2 <sup>3</sup>.

- $> 0.7 \mu m$  é a radiação infravermelha, que corresponde a 48 do espectro;
- $> 0.4$  e  $< 0.7 \mu m$  é a radiação visível, que corresponde a 43 % do total;
- $< 0.4 \mu m$  é a radiação ultravioleta e raio x , 9 % do espectro.

99 % da radiação solar tem entre 0.15 e 4.0  $\mu m$  de comprimento de onda. O máximo da radiação solar ocorre no comprimento de onda próximo de 0.5  $\mu m$  (cor azul-verde). Apesar desta gama de comprimentos de onda que chegam no topo da atmosfera apenas parte chega até a superfície da Terra, alguns comprimento são absorvidos, dissipados ou atenuados pelos gases e outros componentes da atmosfera.

Devido a esfericidade da Terra a radiação solar não chega por igual em todas as latitudes. Se o eixo da Terra não fosse inclinado em relação a eclíptica <sup>4</sup> o fluxo médio da radiação

---

<sup>3</sup>Obs: Não confundir comprimento de onda ( $\mu m$ ) com frequência. Ondas com pequeno comprimento de onda tem alta frequência e vice-versa. Na figura 1.2 os nomes ultravioleta e infravermelho referem-se a frequência e não ao comprimento de onda.

<sup>4</sup>Órbita da Terra ao redor do Sol

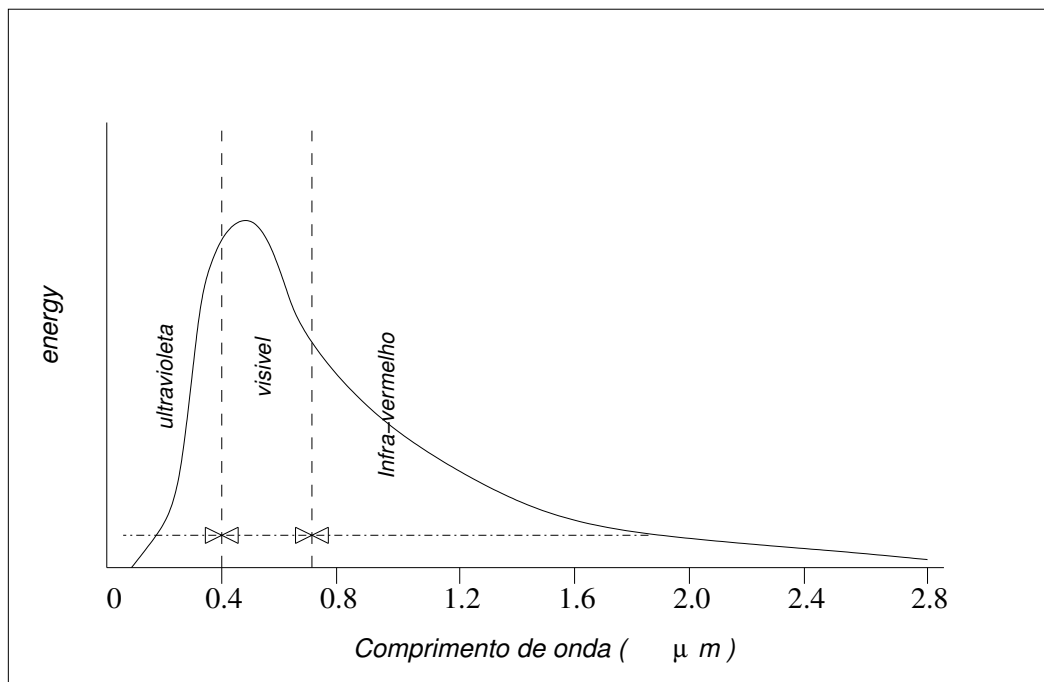


Figura 1.2: Distribuição da intensidade de radiação em função do comprimento de onda ( $\mu m$ ) para um corpo negro com temperatura superficial de 5.900 K (representando o Sol).

solar recebido pela Terra seria máximo no equador e nulo nos polos, onde os raios solares seriam totalmente tangenciais a superfície terrestre, conforme mostra a figura 1.3. Nesta configuração o fluxo médio de radiação variaria entre  $\bar{S}/\pi$  no equador até 0 nos polos.

Mas como existe uma inclinação de  $23.5^\circ$  do eixo da Terra, a energia recebida nos polos não é exatamente nula, pois no verão austral o polo sul fica exposto ao sol, recebendo seus raios não totalmente tangenciais. O mesmo acontece no verão setentrional. Resultando em uma distribuição do tipo apresentada na figura 1.4. Na figura 1.4 a linha contínua superior representa a radiação solar que incide na Terra, a linha contínua inferior representa a quantidade de energia solar absorvida e a linha tracejada representa a energia que é devolvida para o espaço.

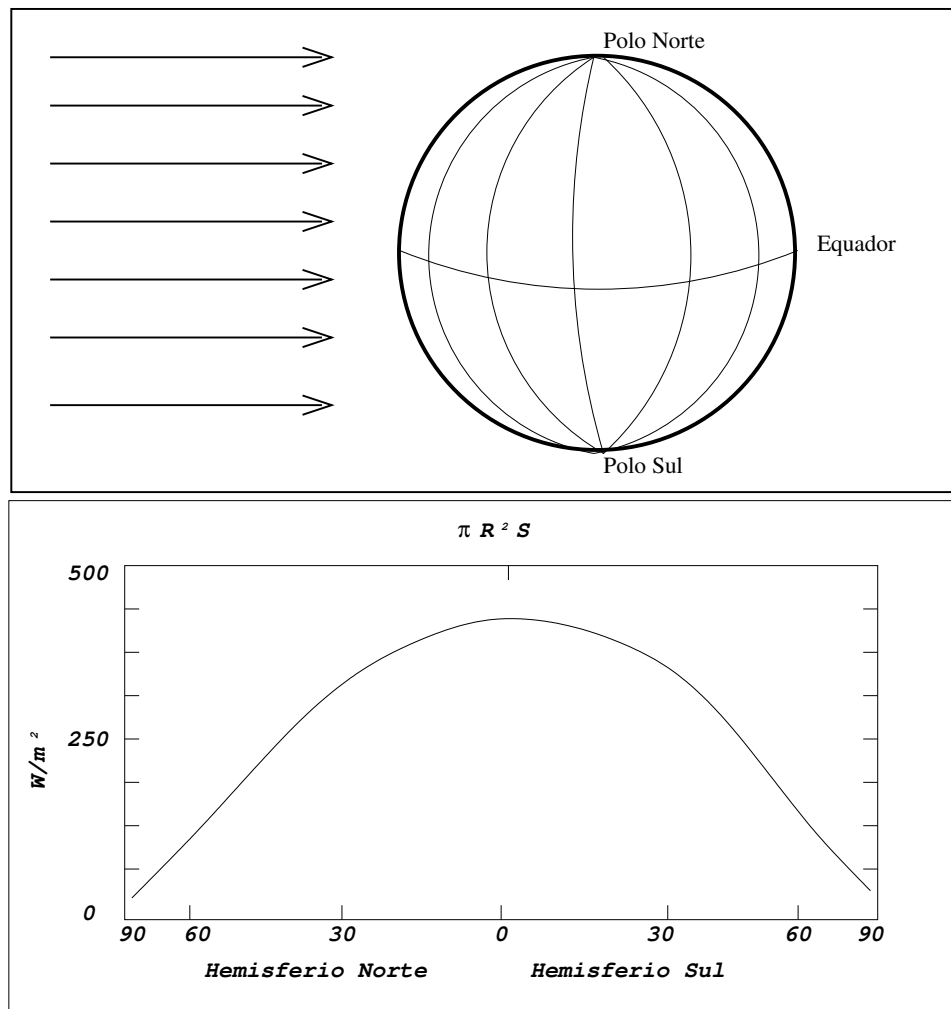


Figura 1.3: *Figura superior: Incidência dos raios solares sem considerar a inclinação do eixo terrestre. Painel inferior: Fluxo médio da energia solar ao longo de um meridiano terrestre, sem considerar a inclinação da Terra.*

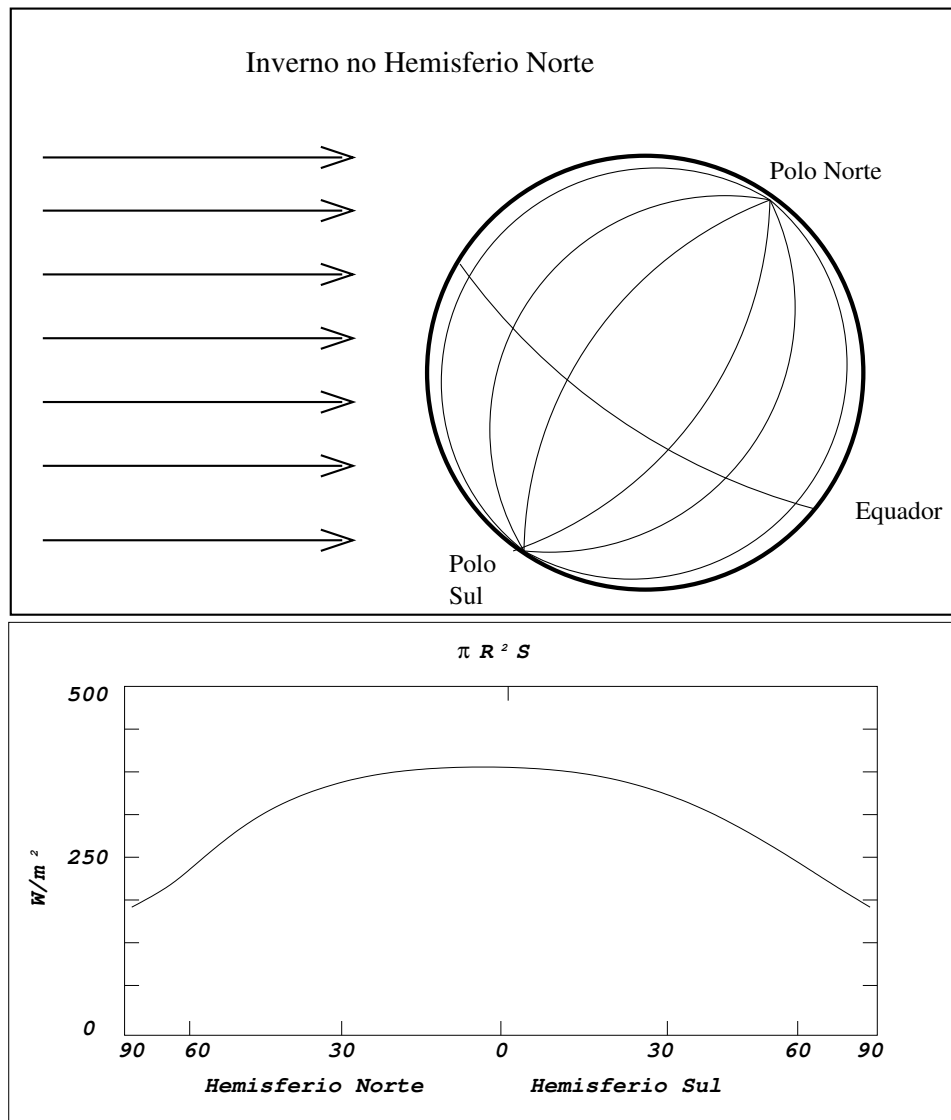


Figura 1.4: *Figura superior: Incidência dos raios solares considerando a inclinação do eixo terrestre. Painel inferior: Fluxo médio da energia solar que chega na Terra, considerando a inclinação de 23.5° do eixo terrestre (linha contínua superior).*

### 1.1.1 Transmissão da Radiação Solar Através da Atmosfera

A radiação solar ao passar pela atmosfera está sujeita a atenuação devido, principalmente, a três processos:

- Absorção
- Difusão
- Reflexão

**Absorção:** este é o processo responsável pela atenuação dos comprimentos de onda mais curtos da radiação solar. Como sabemos a radiação solar é composta por um espectro de diversos comprimentos de onda, dois quais os mais curtos são o ultravioleta e o Raio x. Estes comprimentos de onda são atenuados logo nas primeiras camadas (camadas mais altas) da atmosfera. Na **ionosfera** (entre 60 e 300 km de altitude) a absorção de ultravioleta e raio x pelos átomos dos gases atmosféricos causa a excitação dos elétrons dentro dos níveis quânticos, e a consequente perda de elétrons por parte dos átomos, gerando íons. Por isto o nome “ionosfera”.

Mais abaixo, próximo de 40 km de altitude, moléculas de oxigênio ( $O_2$ ) estão sempre sendo destruídas, devido absorção de REM<sup>5</sup> ultravioleta, e gerando átomos de oxigênio, os quais se combinam com outras moléculas de oxigênio para formar ozônio ( $O_3$ ). O ozônio formado é instável sendo destruído rapidamente por absorção de REM ultravioleta de comprimento de onda um pouco maior que aquele que destrói as moléculas de ( $O_2$ ). Apesar do ozônio ser formado principalmente nesta camada a 40 km de altitude ele é encontrado em maior concentração mais abaixo, a 25 ou 30 km de altitude, para onde é transportado o ozônio que não é destruído tão logo é formado. Esta camada é conhecida como “ozonoesfera”, devido a grande concentração de ozônio. A absorção de REM ultravioleta ocorre, portanto, no topo da ozonoesfera. Desta forma a ozonoesfera e ionosfera funcionam como um filtro para os raios ultravioleta, absorvendo-os e impedindo que cheguem até a superfície da Terra.

Na atmosfera inferior, abaixo dos 10 km de altitude, o único constituinte atmosférico capaz de absorver quantidades de REM significantes é o vapor d’água (Absorve principalmente na faixa do Infravermelho). Em média 10 % da radiação solar total é absorvida pelo vapor d’água, mas esta quantidade varia muito de local para local. As nuvens também absorvem uma pequena parte da radiação solar incidente.

**Difusão:** este processo ocorre devido a presença de micro-partículas em suspensão na atmosfera (quartzo, metais pesados, etc...) e devido às próprias moléculas dos gases e vapor d’água. Os raios solares incidem sobre as partículas e são desviados para diversas direções. A REM que não é absorvida pelas partículas e moléculas atmosféricas é difundida por estas. Este processo também é conhecido por “espalhamento” (scattering em inglês). As partículas pequenas difundem os comprimentos de onda menores, enquanto que as partículas maiores difundem os comprimentos de onda maiores<sup>6</sup>. Como as partículas menores são mais leves

---

<sup>5</sup>Radiação Eletro-Magnética

<sup>6</sup>Se a partícula tem um raio menor que um décimo do comprimento da onda, a intensidade da difusão é maior na banda dos comprimentos curtos

e ficam suspensas a maiores alturas na atmosfera, os primeiros raios a serem difundidos são aqueles correspondentes aos menores comprimento de onda (azul). Além disto, o comprimento de onda correspondente a cor azul é difundido pelas moléculas dos gases atmosféricos, por isto o céu é azul. Conseqüentemente, as partículas maiores ficam suspensas a alturas menores, e os comprimentos de onda difundidos quando os raios solares incidem inclinadamente (horas de nascer ou por do sol) são os comprimento de onda maiores (correspondente ao vermelho). Por isto o céu fica avermelhado nestas horas.

Parte da radiação que é difundida é posteriormente absorvida na atmosfera, e parte alcança a superfície terrestre, mas aproximadamente 7 % da radiação incidente é perdida para o espaço por causa da difusão.

**Reflexão:** a reflexão ocorre na atmosfera quando os raios solares atingem as nuvens. As nuvens absorvem parte da radiação e refletem parte. A proporção na qual estas refletem depende do tipo e espessura das mesmas. Na superfície da Terra e do mar a reflexão ocorre em diferentes graus de intensidade, dependendo da rugosidade da superfície, conforme mostra a tabela 1.1. Superfícies lisas cobertas de neve, por exemplo, podem refletir até 90 % dos raios solares incidentes. No mar a reflexão é sempre baixa, em torno de 2 %, mas é tanto menor quanto maior o estado de agitação da superfície. A reflexão também pode ser expressa na forma de albedo (equação 1.6).

neve	até 90 %
areias (desertos)	35 %
florestas ou pastos	10 a 25 %
campos arados secos	12 a 20 %
idades ou rochas	12 a 18 %
solo úmido	$\pm$ 10 %
água calma	2 %

Tabela 1.1: Albedo ( $\alpha$ ) para diferentes tipos de superfícies encontradas na Terra. Fonte: Harvey, 1976.

## 1.2 Modelo de Equilíbrio de Radiação do Sistema Oceano-Atmosfera

Se a Terra absorvesse a radiação solar sem nenhuma perda de calor, sua temperatura deveria aumentar indefinidamente. Porém, isto não acontece, na real o que observamos é um equilíbrio da temperatura terrestre, com pequenas variações em torno deste equilíbrio. A Terra absorve a radiação solar, se aquece, e irradia calor. Existe um equilíbrio entre as quantidades de calor absorvida e irradiada pela Terra. A capa fluida ao redor da Terra (atmosfera + oceanos) exerce um papel importante na manutenção deste equilíbrio. De acordo com modelos idealizados para um corpo escuro do tamanho da Terra, recebendo radiação solar na taxa que a Terra recebe, se não houvesse uma capa fluida (na proporção da atmosfera e dos oceanos ao redor da Terra) o equilíbrio de radiação seria atingido com a Terra

a uma temperatura de 270 K no equador, 150 K no polo sul e 170 K no polo norte. Estes valores são bem diferentes dos observados na Terra. Na verdade a temperatura no equador é maior, e a diferença entre o equador e os polos é menor. Conclui-se então que a atmosfera e o oceano devem ser responsáveis pela manutenção da temperatura terrestre em torno de valores habitáveis. Se considerarmos a atmosfera e computarmos neste cálculo a quantidade de calor irradiado pela Terra, que é absorvido pelas nuvens e re-irradiado em direção a Terra, veremos que a temperatura média de equilíbrio sobe para 288 K, a qual é bem mais razoável.

A capa de fluidos ao redor da Terra atua de duas maneiras na manutenção do clima:

1. também absorve calor, elevando a temperatura para valores maiores do que existiriam se não houvessem oceanos e atmosfera;
2. distribui o calor em direção aos polos, diminuindo a discrepância entre o equador e os polos.

A figura 1.5 mostra a irradiação de um corpo escuro com uma temperatura superficial de 285 K (próxima a da Terra). O espectro de irradiação da Terra tem seu pico em torno de 10  $\mu\text{m}$ . Da energia irradiada pela Terra parte é absorvida pelos gases atmosféricos ( $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  e  $\text{O}_3$ ). A radiação não absorvida é perdida para o espaço <sup>7</sup>. Quase toda a radiação terrestre é emitida no comprimento maior que 4  $\mu\text{m}$ , enquanto que 99 % da radiação solar está abaixo deste limite <sup>8</sup>.

Variações na temperatura da superfície terrestre também podem ocorrer devido às variações na composição da superfície, que propiciam diferentes albedos.

### 1.3 O Efeito Estufa

Como foi visto, a atmosfera exerce um papel importante na manutenção da temperatura de equilíbrio da Terra. Parte da radiação infravermelha que é emitida pela Terra é absorvida ou refletida de volta pelos constituintes atmosféricos. Nota-se na figura 1.5 que, da energia irradiada pela Terra, o máximo ocorre em 10  $\mu\text{m}$ . Abaixo de 8  $\mu\text{m}$  e acima de 14  $\mu\text{m}$  quase que a totalidade da radiação é absorvida por  $\text{CO}_2$  e  $\text{H}_2\text{O}$ . Entre estes valores existe uma janela na qual a radiação é perdida para o espaço (quando o céu está livre de nuvens). Os constituintes atmosféricos que absorvem a radiação emitida pela Terra, por sua vez, re-emitem radiação em ondas longas para todas as direções, parte em direção ao espaço e parte de volta a Terra. A atmosfera funciona, então, como o vidro de uma estufa de plantas, que aprisiona a radiação emitida pela Terra. Na estufa, a radiação solar chega em comprimento curto e atravessa o vidro, aquecendo a Terra, que irradia calor em comprimento de onda longo. Esta radiação longa é absorvida pelo vidro, e este re-irradia para ambos os lados (para o espaço e para a Terra), conforme pode ser observado na figura 1.6. Por isto este efeito da atmosfera é chamado de efeito estufa.

---

<sup>7</sup>A energia perdida para o espaço é perdida principalmente na banda entre 8 e 12  $\mu\text{m}$ , por isto esta banda é conhecida como janela espectral.

<sup>8</sup>Devido a esta diferença no comprimento de onda das radiações recebida e emitida pela Terra, convencionou-se o comprimento de onda de 4  $\mu\text{m}$  como o limite entre ondas curtas e longas

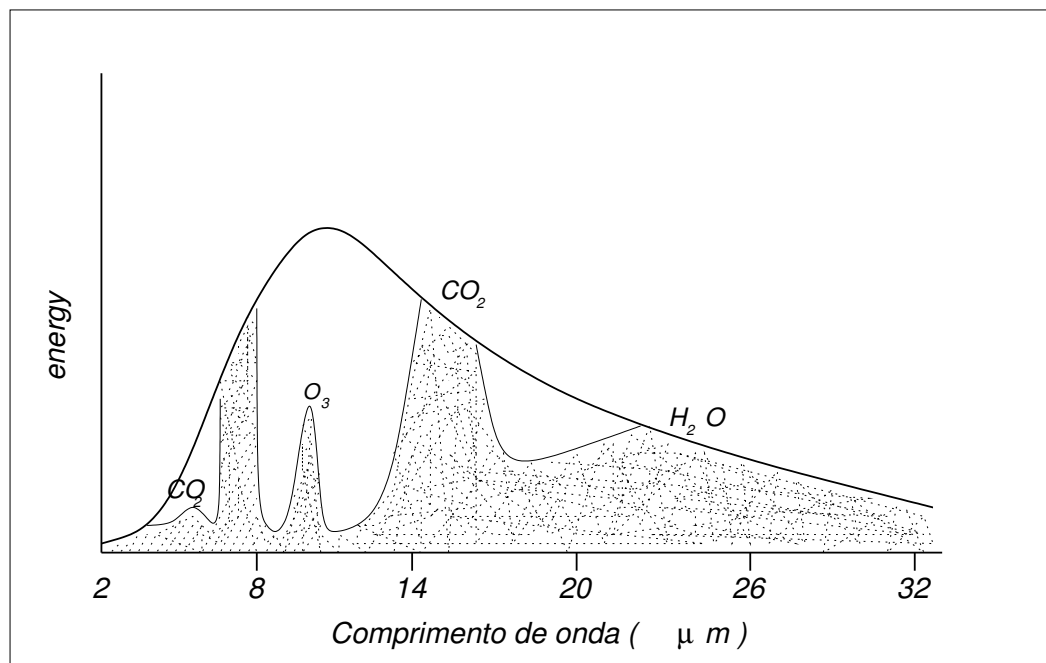


Figura 1.5: Distribuição da intensidade de radiação em função do comprimento de onda de um corpo escuro com temperatura superficial de 285 K (representando a Terra) e a representação esquemática da absorção desta radiação por vapor d'água, dióxido de carbono e ozônio, na atmosfera. Fonte : Harvey, 1976.

Historicamente a temperatura da Terra tem se mantido próxima do valor de equilíbrio, com pequenas oscilações em torno deste valor. Estas oscilações são consequência das variações no balanço entre a radiação recebida e irradiada pela Terra. Segundo os modelos até hoje idealizados pelos cientistas, espera-se que, se houver um desbalanço positivo, existirá um ganho de calor pela Terra e um aumento da temperatura da mesma. Consequentemente haverá um aumento na temperatura irradiada pela Terra e o equilíbrio do balanço de radiação será reestabelecido a uma temperatura maior. Por outro lado, se houver um desbalanço negativo o equilíbrio será reestabelecido a uma temperatura menor. As causas destes desequilíbrios podem ser naturais, mas podem também ser antropogênicas, como por exemplo, as atividades poluidoras do homem, gerando aumento de gases na atmosfera, como  $CO_2$ , ou destruindo a camada de ozônio.

## 1.4 O Efeito dos Movimentos Convectivos no Balanço Radiativo

A descrição do balanço de radiação feita até agora não leva em consideração os movimentos atmosféricos, isto é, temos considerado a capa fluida ao redor da Terra como sendo estática. Na verdade esta não o é, mas apresenta movimentos, tanto advectivos (horizontais) como convectivos (verticais)<sup>9</sup>. O balanço de calor que ocorre na atmosfera é dinâmico, sendo que

<sup>9</sup>Convencionamos “Movimentos Convectivos” aqueles que ocorrem na vertical, tanto para cima como para baixo. E “Movimentos Advectivos” aqueles que ocorrem na horizontal



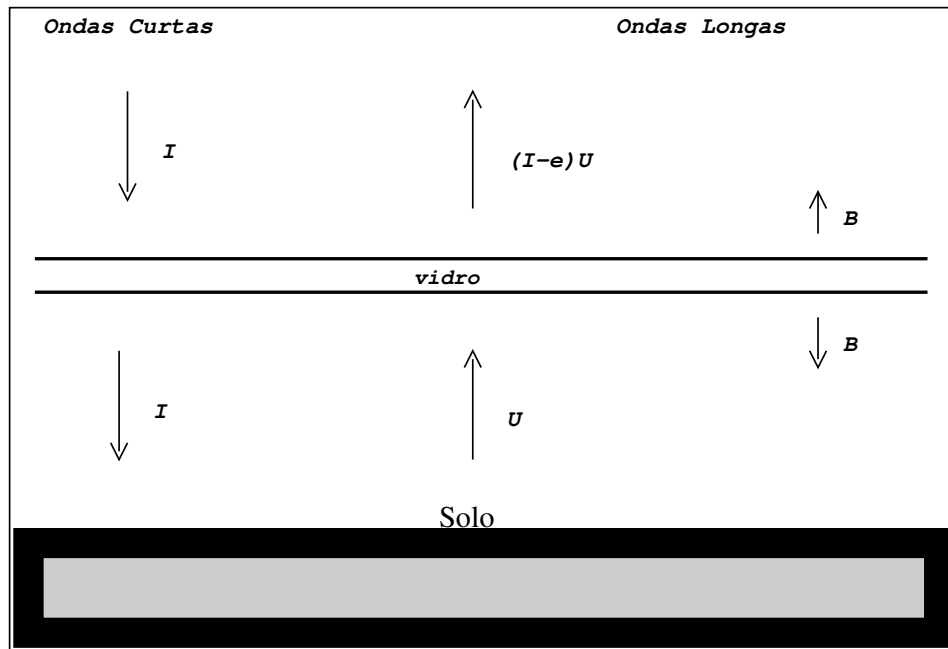


Figura 1.6: *Efeito Estufa*. Ondas curtas ( $I$ ), ondas longas ( $U$ ), fração de  $U$  absorvida ( $e$ ), ondas longas emitidas pelo vidro ( $B$ ).

o vapor d'água presente na atmosfera é que permite a distribuição do calor, pois é ele que gera os movimentos convectivos levando o calor para maiores altitudes. Como vimos o Sol aquece a Terra e esta irradia calor para a atmosfera. O ar em contato com a Terra absorve (através do vapor d'água) o calor irradiado por esta, torna-se mais leve e sobe. O ar ao deslocar-se para cima carrega vapor d'água para camadas superiores da atmosfera. O vapor d'água ao ser levado para maiores altitudes se condensa devido o contato com ar mais frio. Ao condensar o vapor d'água libera calor latente e aquece o ar a sua volta, então o ar fica mais leve e sobe mais ainda, formando verdadeiras colunas de ar ascendente. Se não houvesse vapor d'água na atmosfera esta não absorveria o calor irradiado pela Terra na proporção em que absorve, e este processo seria extremamente lento.

Algumas regiões da Terra são mais propícias para a evaporação, pois possuem grandes quantidades de águas rasas próximas a continentes e temperaturas elevadas. Como as bacias dos rios Congo e Amazonas, por exemplo, e a região da Indonésia. Sobre estas regiões formam-se grandes colunas de ascensão de ar, que carregam vapor d'água para a atmosfera superior. O ar que sobe, em grande quantidade, deixa espaço que será ocupado pelo ar a volta. Este por sua vez deixa espaço para ser ocupado por outras massas de ar que vem de altitudes superiores, e que são as massas de ar que subiram nas colunas de ascensão, pois estas ao subirem se resfriam e tendem a descer. Formando assim células de circulação, denominadas "células de Walker", esquematizadas na figura 1.7. Estas células ocorrem no sentido zonal

<sup>10</sup>.

O vapor d'água que sobe na atmosfera deverá alterar o balanço radiativo desta, pois o vapor d'água também vai absorver calor. Então o equilíbrio final depende do balanço entre os efeitos radiativos e convectivos e é chamado de "equilíbrio radiativo-convectivo". A circulação

<sup>10</sup>Obs: sentido zonal = leste-oeste e sentido meridional = norte-sul

convectiva tende a homogeneizar a distribuição vertical de calor na atmosfera e amenizar os gradientes verticais.

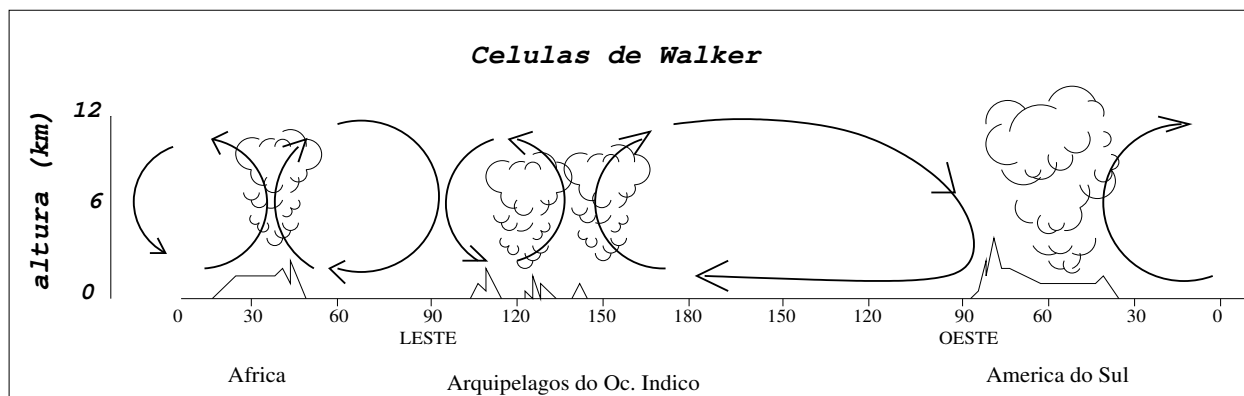


Figura 1.7: Diagrama esquemático da circulação do ar nas células de Walker

Os oceanos também exercem influência neste equilíbrio por que estes também absorvem a radiação solar. Como vimos a penas 2% da radiação incidente nos oceanos é refletida o restante é absorvido. Esta energia absorvida contribui para a manutenção da temperatura da Terra. A temperatura de equilíbrio da Terra também depende das trocas de calor entre o oceano e a atmosfera, pois parte do calor absovido pelos oceanos é posteriormente cedido à a tmosfera.

## 1.5 O Efeito dos Movimentos Advectivos

Além dos movimentos convectivos, que amenizam os gradientes verticais de temperatura, existem movimentos que distribuem o ar horizontalmente. Como foi dito a capa fluída em torno da Terra é responsável não só por manter a temperatura do planeta mas por distribuir o calor do equador em direção aos polos. Portanto, movimentos horizontais devem haver, para levar este calor em direção às altas latitudes. A circulação atmosférica contribui em grande parte com esta distribuição horizontal de calor, mas os oceanos tem a sua participação como veremos mais a frente.

### 1.5.1 Circulação Atmosférica

A circulação atmosférica ocorre na forma de células, que são uma combinação de movimentos convectivos e advectivos. O movimento convectivo que ocorre na forma de células zonais (células de Walker) na atmosfera interage com outro tipo de circulação, a circulação meridional, que também tem as suas células. Se a Terra não estivesse em rotação a circulação meridional seria uma célula simples entre o equador e o polo: o ar subiria na região equatorial devido a absorção do calor irradiado em maior intensidade nesta região, se esfriaria por contato com ar mais frio nas camadas superiores da atmosfera, e desceria na região polar, conforme mostra a figura 1.8.

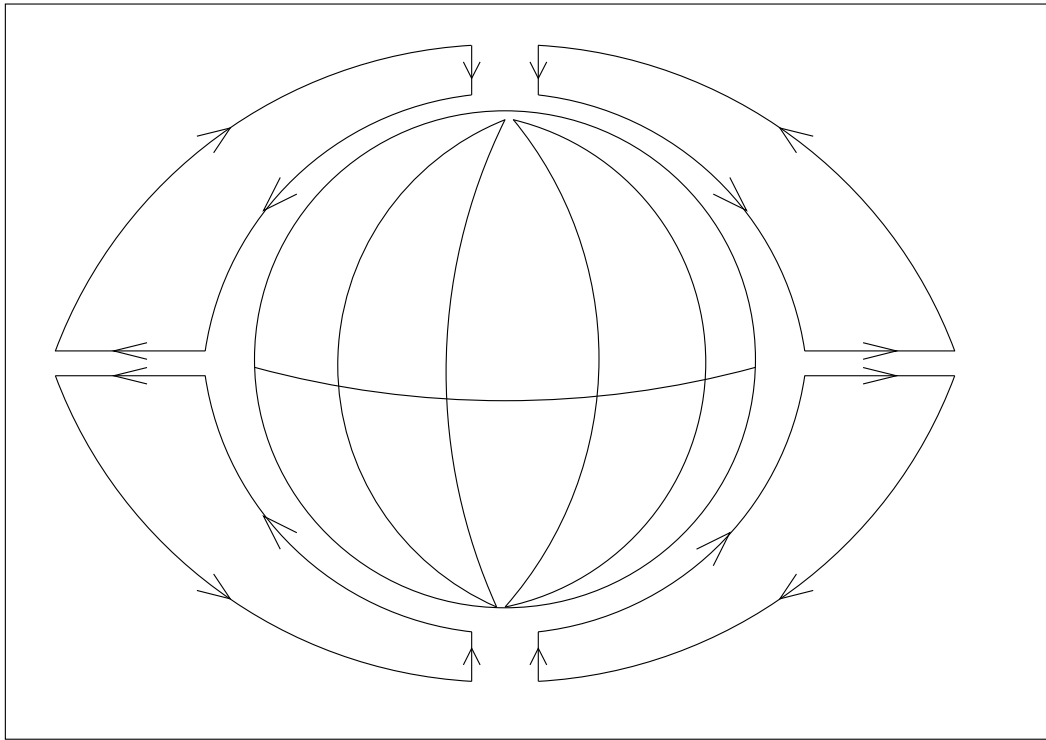


Figura 1.8: *Sistema de convecção atmosférica para uma Terra hipotética, não rotatória*

A rotação da Terra altera este esquema. O ar quando está em contacto com a Terra também esta rodando junto com esta, portanto quando este sobe tende a conservar sua tendencia de rotação (momento angular). Isto faz com que, ao se deslocar em direção aos polos (nas altas altitudes), o ar sofra um desvio (para direita no hemisfério norte e para esquerda no hemisfério sul), adquirindo uma componente zonal em seu movimento. Nesta nova trajetória o ar já começa a se resfriar e conseqüentemente a perder altitude. Portanto, o ar não vai descer nas latitudes polares, mas antes, nas latitudes tropicais (mais ou menos a  $30^\circ$  de latitude), fazendo com que as células formadas sejam menores do que aquelas observadas na figura 1.8. Quando o ar atinge novamente a superfície da Terra este vai adquirir calor e momento angular de novo por estar em contato com a superfície terrestre e assim formam-se as células de circulação (figura 1.9) como veremos a seguir.

A primeira célula, ou **célula de Hadley** é formada por um movimento de ascensão na região equatorial e movimento de descensão na faixa de latitude em torno de  $30^\circ$ . Na região equatorial as altas taxas de evaporação e irradiação solar causam movimentos convectivos na atmosfera, fazendo com que o ar, em contato com a superfície do oceano suba. O ar que subiu (que estava em contato com a superfície rotatória da Terra) tem que conservar seu momento angular absoluto, por isto ele se move em direção ao polo. Este ar esta carregado de vapor d'água. No trajeto em direção ao polo, nas camadas superiores da atmosfera, ele se esfria, emitindo radiação infravermelha, tornando-se mais denso e o vapor d'água condensa e se precipita. A esta altura do seu movimento em direção ao polo o ar ja atingiu  $25/30$  graus de latitude, seu movimento já adquiriu uma componente zonal bastante forte e já perdeu bastante umidade através da precipitação do vapor d'água condensado. Por estar mais denso o ar desce em direção a superfície terrestre. Este ar que desce é frio e seco, dando origem a um cinturão de desertos em toda a Terra. Parte deste ar desloca-se em direção a região

equatorial, formando uma célula de circulação atmosférica. A região equatorial é uma região de baixa pressão atmosférica, pois nesta região o ar está em ascensão.

O movimento dos ventos próximo a superfície, na célula de Hadley, ocorre no sentido meridional, da latitude de 30 graus para o equador. Este movimento, ao interagir com as células de Walker e ao sofrer o efeito do movimento da Terra (força de Coriolis) é defletido para esquerda no Hemisfério Sul (HS) e para direita no Hemisfério Norte (HN). De modo que os ventos na região equatorial <sup>11</sup> sopram de nordeste no HN e de sudeste no HS. Estes ventos convergem para a **Zona de Convergência Inter Tropical (ZCIT)** ou ITCZ (Inter tropical Convergence Zone) em inglês. Esta é uma zona de calmaria, pois localiza-se na zona intermediária entre os alísios de nordeste e de sudoeste, e de muita nebulosidade e de altas taxas de precipitação, devido as altas taxas de evaporação.

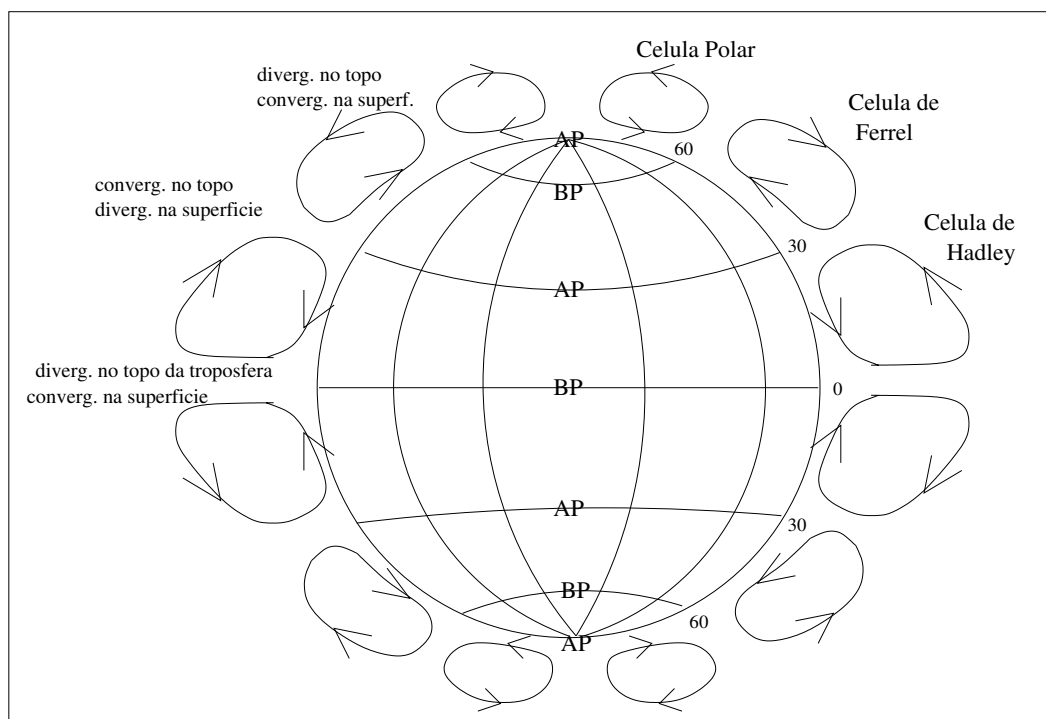


Figura 1.9: *Células de circulação atmosféricas em torno de uma Terra rotatória hipotética, totalmente coberta de água.*

A segunda célula, conhecida como **célula de Ferrel**, está localizada entre 30 ° e 60 ° de latitude. Na faixa onde o ar frio e seco desce forma-se uma zona de alta pressão, que circunda o globo terrestre, interrompendo-se nas faixas de continentes. Na faixa em torno de 60 ° forma-se uma região de baixa pressão, onde o ar sobe. A célula de Ferrel está compreendida entre estas faixas de alta e baixa pressão. O ar que percorre a parte inferior da célula, próximo a superfície, desloca-se em direção aos polos. O efeito da força de Coriolis nestes ventos faz com que soprem em direção a leste, tanto no HN como no HS. Ou seja, **os ventos na célula de Ferrel são ventos de oeste, pois vêm de oeste**. Por isto estes ventos são denominados de “westerlies” ou “deriva do vento oeste”. No extremo norte da célula de Ferrel, mais ou menos 60° de latitude, forma-se uma região de grande instabilidade, baixa pressão e fortes ventos.

<sup>11</sup>ventos alísios ou “trade winds”

A terceira célula, ou **célula Polar**, ocorre entre a faixa de baixa pressão a  $60^\circ$  e o polo, onde forma-se uma área de alta pressão devido ao movimento de descensão de ar. O ar que sobe na faixa de  $60^\circ$  desloca-se tanto para norte como para sul, portanto parte deste ar descende na área de alta pressão polar e parte na faixa de alta pressão circungalbal em torno de  $30^\circ$ . O movimento dos ventos na parte inferior da célula Polar ocorre em direção ao equador e tem sempre uma componente zonal que vem de leste. Por isto estes ventos são conhecidos como “easterlies” ou “deriva do vento leste”. Um corte meridional das células atmosféricas é apresentado na figura 1.10.

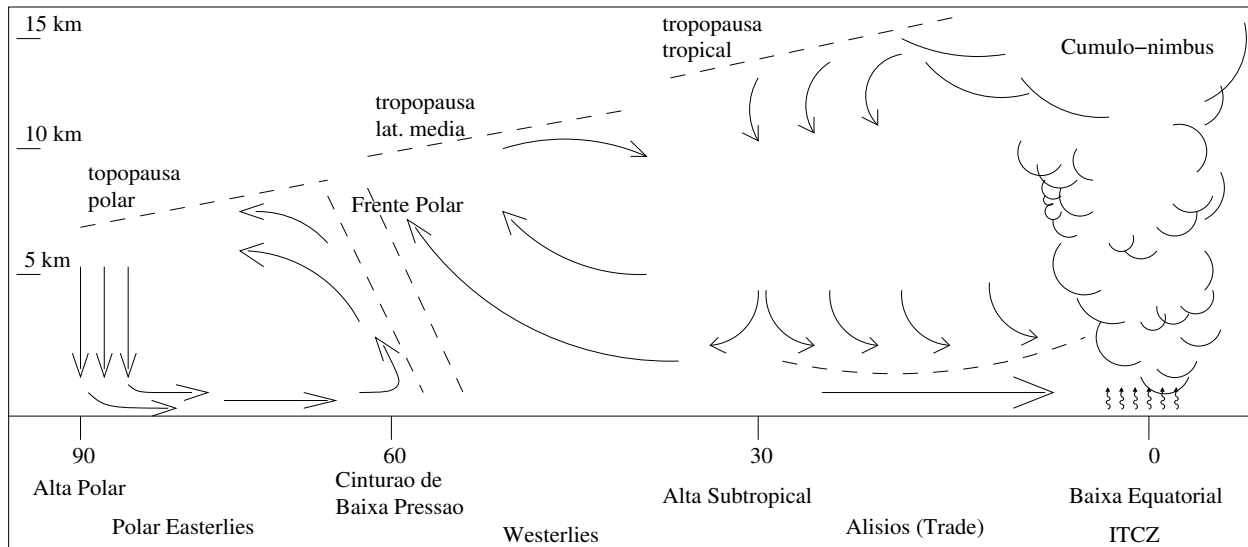


Figura 1.10: *Desenho esquemático da circulação atmosférica meridional (N-S).*

Os ventos superficiais e as faixas circunglobais de alta e baixa pressões associados a esta circulação em células é apresentado na figura 1.11

Quando computamos o efeito dos continentes este esquema de distribuição de pressão e ventos se altera, de modo que as faixas circunglobais são interrompidas nos continentes. Como foi visto, sobre os continentes existem grandes colunas de ascensão de ar (nas células de Walker), gerando baixa pressão e interrompendo as faixas circunglobais de alta pressão. Além disso as taxas de troca de calor entre o solo e o ar são mais intensas do que as taxas de troca entre o oceano e o ar, fazendo com que a pressão atmosférica apresente maior variação sobre os continentes e maior constância sobre os oceanos. Por isso formam-se centros quase-estacionários de alta e baixa pressão atmosféricas sobre os oceanos, ao invés de faixas circunglobais.

A faixa de alta pressão na latitude de  $30^\circ$  é interrompida sobre os continentes, fazendo com que tenhamos centros de alta pressão centrados em  $30^\circ$  de latitude sobre os oceanos, ao invés de faixas circunglobais. Existem centros de alta pressão estacionários centrados nos oceanos Atlântico Sul, Atlântico Norte, Pacífico Sul, Pacífico Norte e Índico.

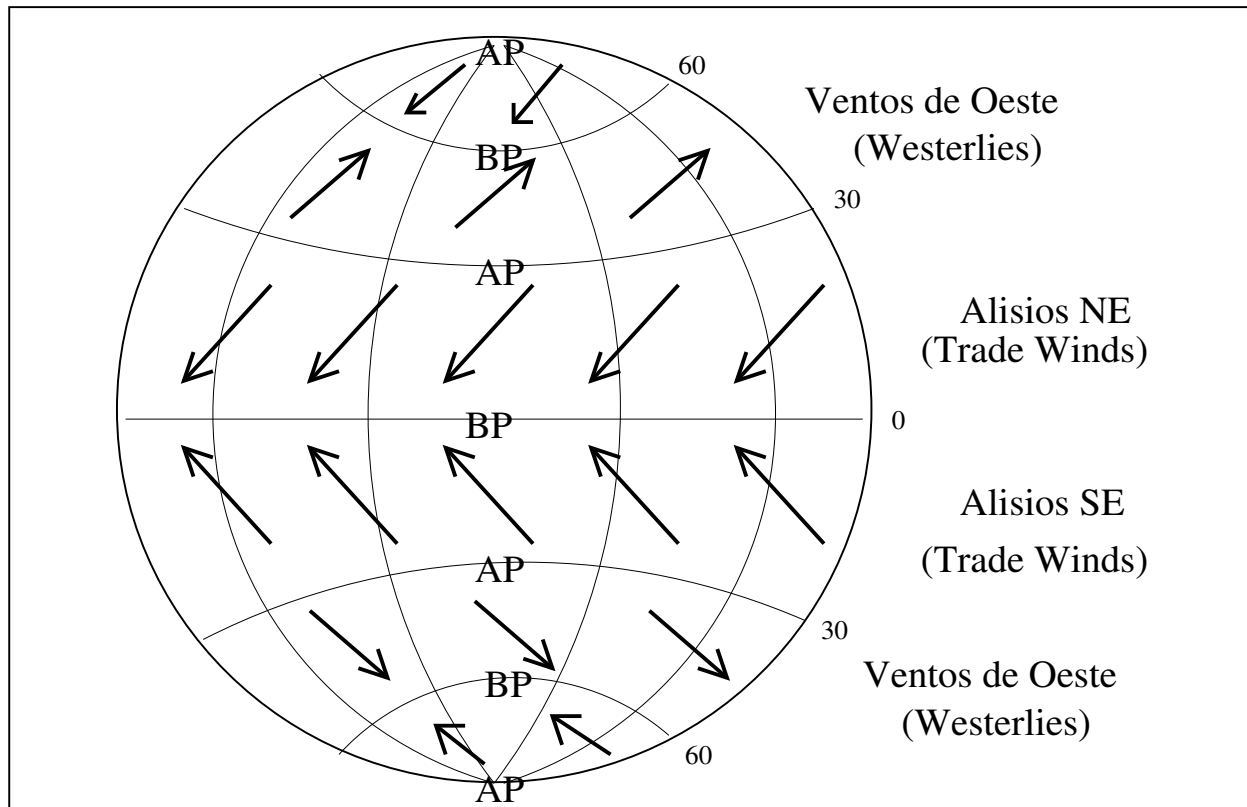


Figura 1.11: Padrão idealizado de ventos e pressão atmosférica na superfície de um planeta Terra rotatório, sem continentes.

### 1.5.2 Os Centros de Alta e Baixa Pressões

A circulação do ar nos sistemas atmosféricos de larga escala, i.e. aqueles que são grandes o suficiente para serem influenciados pelo movimento de rotação da Terra, varia de acordo com o hemisfério.

Nos centros de alta pressão (AP) a circulação do ar é sempre convergente no topo da massa de ar e divergente na sua camada inferior. O ar que converge no topo da massa de ar forma uma coluna de movimento descendente, a qual passa a exercer maior pressão no ponto onde entra em contato com a superfície terrestre, sendo por essa razão conhecidos como centros de alta pressão. O inverso ocorre nos centros de baixa pressão (BP), com a formação de movimento convergente na superfície, ascensão de ar no centro e movimento divergente no topo.

O efeito da rotação da Terra faz com que essa circulação seja defletida, para a esquerda no hemisfério sul e para a direita no hemisfério norte, fazendo com que o movimento do ar seja sempre giratório em torno das altas e baixas pressões atmosféricas. Dessa forma o giro do ar em torno de uma alta pressão atmosférica no hemisfério sul torna-se antihorário, na camada inferior, e horário no topo da massa de ar e vice-versa nos centros de baixa pressão. O contrário ocorre para o hemisfério norte. Independente de qual hemisfério esteja ocorrendo, a circulação em torno de uma alta pressão é dita anticiclônica, enquanto que a circulação em torno de uma baixa pressão é chamada de ciclônica. Isso por que a circulação ciclônica

ocorre no mesmo sentido da rotação da Terra, e a ciculação anticiclônica ocorre no sentido contrário.

Desenhos esquemáticos das circulações em torno de centros atmosféricos de alta e baixa pressões são apresentados nas figuras 1.12, 1.13 e 1.14. Na figura 1.12 é apresentada uma circulação hipotética, que aconteceria num planeta não giratório (ou num centro de pequena escala, não influenciado pela rotação da Terra), e nas duas figuras subsequentes são apresentadas as circulações defletidas por Coriolis nos hemisferios sul e norte, respectivamente.

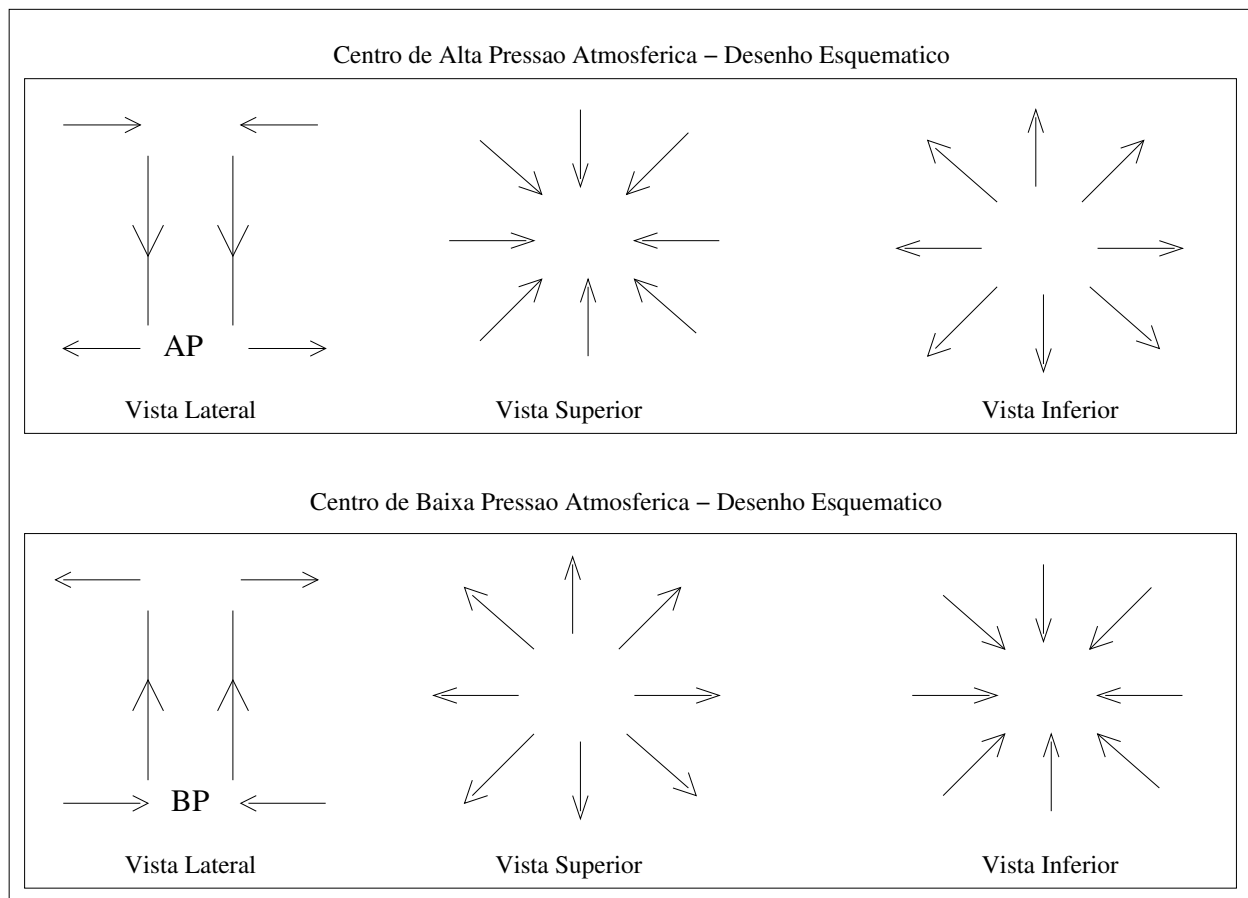


Figura 1.12: *Vistas lateral, superior e inferior de centros de alta pressão (AP) e baixa pressão (BP) atmosféricas, em um planeta não rotatório.*

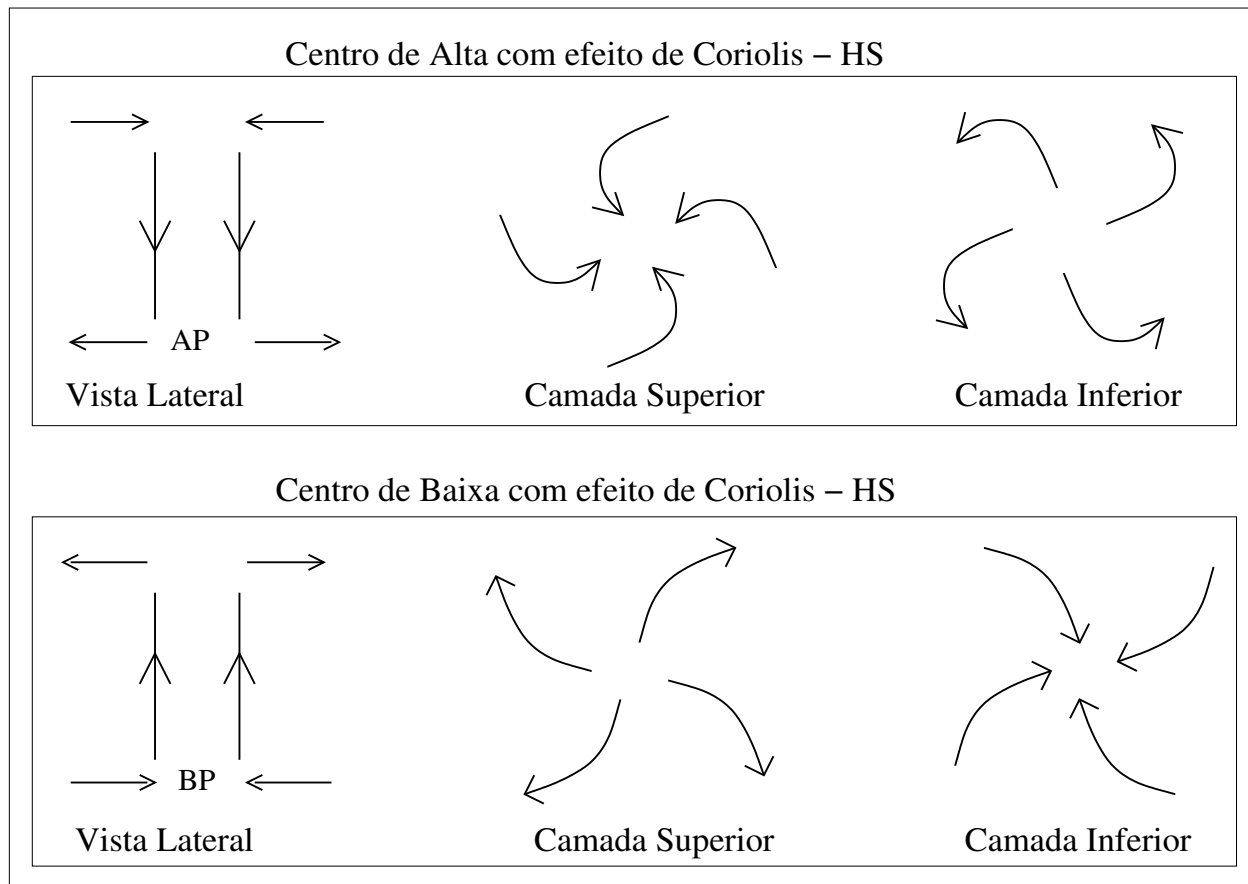


Figura 1.13: Vista lateral e vista horizontal das camadas inferior e superior de centros de alta pressão (AP) e baixa pressão (BP) atmosféricas, considerando-se o efeito de Coriolis - desenho esquemático para o hemisfério sul.



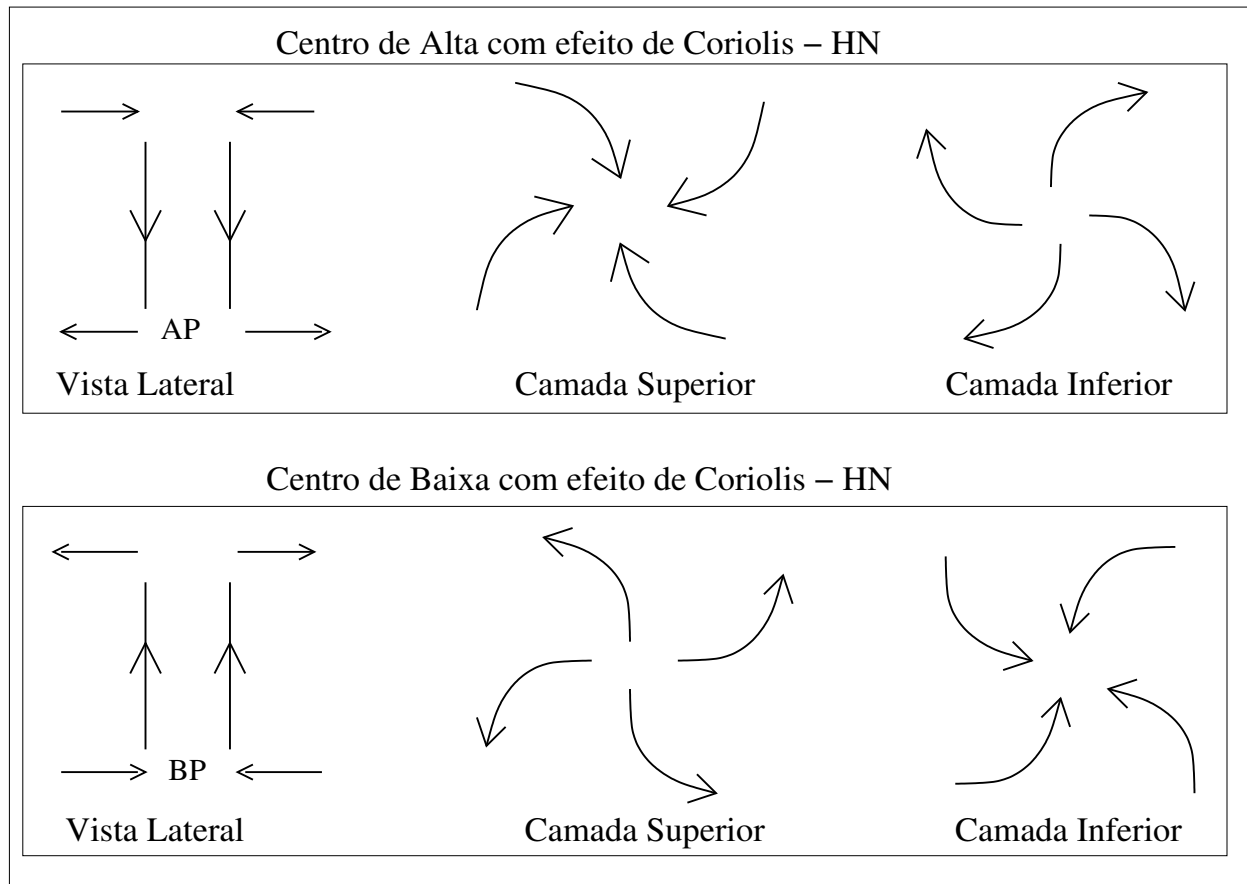


Figura 1.14: *Vistas lateral e vista horizontal das camadas inferior e superior de centros de alta pressão (AP) e baixa pressão (BP) atmosféricas, considerando-se o efeito de Coriolis - desenho esquemático para o hemisfério norte.*

Os centros de baixa pressão atmosférica são em geral regiões de alta instabilidade, ventos fortes e chuva intensa, podendo vir a formar furacões ou tornados.

Como foi dito acima, alguns centros de alta pressão atmosférica são quasi-estacionários, como os centros de alta pressão tropical centrados nos oceanos Atlântico Norte e Sul e oceanos Pacífico Norte e Sul, e os centros de alta pressão polares. Nas regiões intermediaárias entre as altas pressões tropicais e alta pressões polares, formam-se regiões de baixa pressão, às quais estão associados fortes ventos, e que são também quasi-estacionárias. .

Além dos centros quasi-estacionários, existem centros de alta e baixa pressão migratórios, os quais formam-se nas latitudes dos sistemas quasi-estacionários e depois migram, advectados pelo sistema de ventos alísios e e ventos de oeste.

É desta circulação atmosférica que resulta a circulação superficial dos oceanos. A transferência de momento dos ventos para o oceano gera as correntes oceânicas superficiais, conhecidas como “wind driven circulation” ou “circulação dirigida pelo vento”, que veremos no capítulo seguinte. Não só a atmosfera exerce uma grande influência no clima terrestre, mantendo sua temperatura e distribuindo calor horizontalmente, mas os oceanos também, como será explicado a seguir.

## Capítulo 2

# Transferência de Propriedades entre o Oceano e a Atmosfera

A transferência de propriedades entre o oceano e atmosfera é de extrema importância para a dinâmica dos oceanos, pois como vimos a atmosfera entra em movimento por absorção diferenciada da radiação solar e então os ventos atuam sobre os oceanos gerando as correntes superficiais. Mas, para que isso ocorra é necessário que momentum seja transferido da atmosfera para o oceano. Além disso, oceano e atmosfera trocam calor e vapor d'água, que vem também a alterar o movimento da água do mar.

### 2.1 Contraste nas Propriedades dos Meios Ar e Água

Vimos como o oceano e atmosfera respondem a um “input” de energia proveniente do sol, e como algumas propriedades básicas do ar e da água e a distribuição dos continentes e mares na superfície da Terra são importantes para o equilíbrio de radiação do planeta. Veremos agora como a interface entre o oceano e atmosfera e as diferenças contrastantes entre estes dois meios são importantes para este equilíbrio. A principal diferença entre o ar e a água, e também a mais evidente, é a diferença de densidade. A água é muito mais densa que o ar e isto faz com que a interface entre estes dois meios seja estável, ou seja, toda vez que ela se deforma a atuação da gravidade a fará retornar ao estado de equilíbrio<sup>1</sup>. Devido a esta estabilidade da interface estes dois meios nunca se misturam significativamente. Encontramos apenas porções de ar na água e vice-versa; spray e bolhas, respectivamente. Portanto a transferência de propriedades entre a água e o ar se restringe às proximidades da interface. No entanto, como a atmosfera tem menor densidade e maior dinâmica, as propriedades transferidas do oceano para a atmosfera espalham-se mais, atingindo maior distância.

A interface é importante para o balanço de calor por dois motivos :

---

<sup>1</sup> Este fenômeno, apesar de parecer irrelevante, é de extrema importância. A atuação da força da gravidade na restauração da interface ar/água é que gera as ondas de gravidade superficiais, que serão explicadas mais adiante.

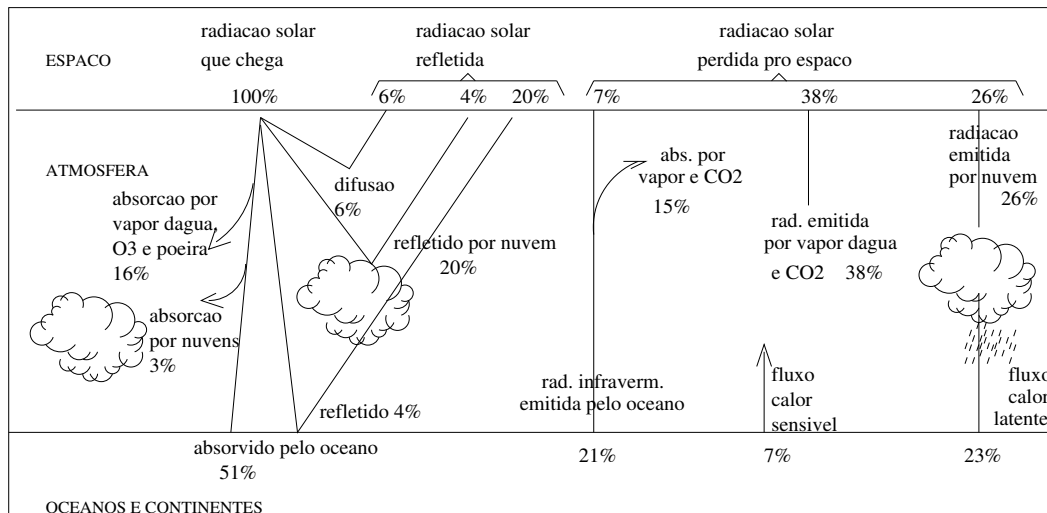


Figura 2.1: Balanço de radiação na atmosfera. Fonte: Gill, 1982.

1. A existência da interface faz com que haja reflexão dos raios solares, modificando a absorção de calor pelos oceanos. Lembre-se que a fração da radiação solar que é refletida é uma função do ângulo de incidência sobre a interface. A reflexão é maior nas altas latitudes onde os raios solares chegam à superfície da Terra mais inclinados.
2. Existe uma diferença nas propriedades ópticas dos meios ar e água, em torno desta interface, que faz com que a absorção de calor seja diferente de cada lado da interface.

Cerca de 19 % da radiação solar é absorvida na atmosfera (gases e núvens) e 30 % é refletida (núvens e superfície terrestre e oceânica), então 51 % é absorvida pelos oceanos (figura 2.1).

## 2.2 A Transmissão da Radiação Solar na Água do Mar

Apesar da distribuição de propriedades na atmosfera ser mais dinâmica, o oceano absorve a muito mais radiação que a atmosfera. A quantidade de partículas e moléculas em suspensão nos oceanos é muito maior, além disto, processos como fotossíntese e outras reações químicas que ocorrem na água do mar, utilizam energia, mantendo-a no meio e evitando que seja perdida. A taxa de absorção varia de acordo com o comprimento de onda. Os comprimentos de onda menores penetram a maiores profundidades no mar. Em áreas costeiras, onde existe maior quantidade de material em suspensão na água, a difusão da radiação é maior. Assim como na atmosfera a difusão da radiação é uma função do tamanho e da quantidade de partículas em suspensão. O resultado é que a penetração de radiação solar no mar é bem menor que na atmosfera. Cerca de 80 % da radiação solar é absorvida nos primeiros 10 metros do oceano. O nível de extinção total da luz no oceano ocorre próximo dos 200 m de profundidade. Em áreas costeiras esta profundidade é menor.

## 2.3 A Influência dos Oceanos no Clima Terrestre

A diferença de densidade entre o oceano e a atmosfera significa que a massa do oceano é muito maior que a da atmosfera. O oceano pesa cerca de 270 vezes mais que a atmosfera. A massa por unidade de área da atmosfera ao nível do mar, ou seja, a massa de uma coluna de ar com área de base de 1 metro quadrado, é aproximadamente  $10^4 kg.m^{-2}$ . Como  $g = 10m.s^{-2}$ , a força exercida, por unidade de área, por esta massa de ar (pressão) é:

$$F = 10^4 . 10kg.m^{-2} . m.s^{-2} = 10^5 N.m^{-2} = 10^5 Pa \quad (2.1)$$

Que equivale a aproximadamente 1 atm. No oceano esta mesma pressão é encontrada a 10 metros de profundidade, e o aumento é de aproximadamente 1 bar para cada 10 m. Esta grande diferença de massa implica em uma grande diferença na armazenagem de calor, ou seja, o calor específico da água do mar é muito maior que o do ar (cerca de 4 vezes). O calor é absorvido na forma latente <sup>2</sup>. A importância do calor latente pode ser avaliada se considerarmos que, nos trópicos, a taxa de evaporação pode chegar a 4 mm por dia. Esta capacidade dos oceanos em armazenar calor é de extrema importância para a manutenção do clima, pois o calor armazenado pelo oceano no verão é liberado no inverno para a atmosfera. Assim os oceanos funcionam como reguladores do clima, evitando variações extremas.

## 2.4 Transferência de Momento entre o Oceano e a Atmosfera.

A circulação superficial dos oceanos (Circulação Dirigida pelo Vento) está totalmente associada a circulação atmosférica e depende da transferência do momento <sup>3</sup> da atmosfera para o oceano.

### 2.4.1 Circulação Oceânica Superficial

Os centros de AP centrados nos Oceanos Atlântico Sul, Atlântico Norte, Pacífico Sul, Pacífico Norte e Índico, ao induzir o movimento superficial da água, por atrito, fazem com que este ocorra também na forma de giros de larga escala. Estes giros oceânicos estão centrados nas latitudes tropicais, onde localizam-se os AP estacionários, ou seja, em torno de 30 °, norte e sul. Estes também obedecem o mesmo esquema de circulação que os centros atmosféricos, ou seja, os giros de circulação anticiclônica <sup>4</sup> são horários no HN e anti-horários no HS, e os giros ciclônicos o contrário.

A distribuição dos ventos superficiais, apresentada na figura 1.11, força o oceano a se deslocar de maneira tal que:

<sup>2</sup>calor que fica armazenado e que é liberado na evaporação.

<sup>3</sup>Obs: Momento = massa x velocidade = mv

<sup>4</sup>Lembrem-se que circulação anti-ciclônica ocorre do centro para a periferia e ciclônica da periferia para o centro.

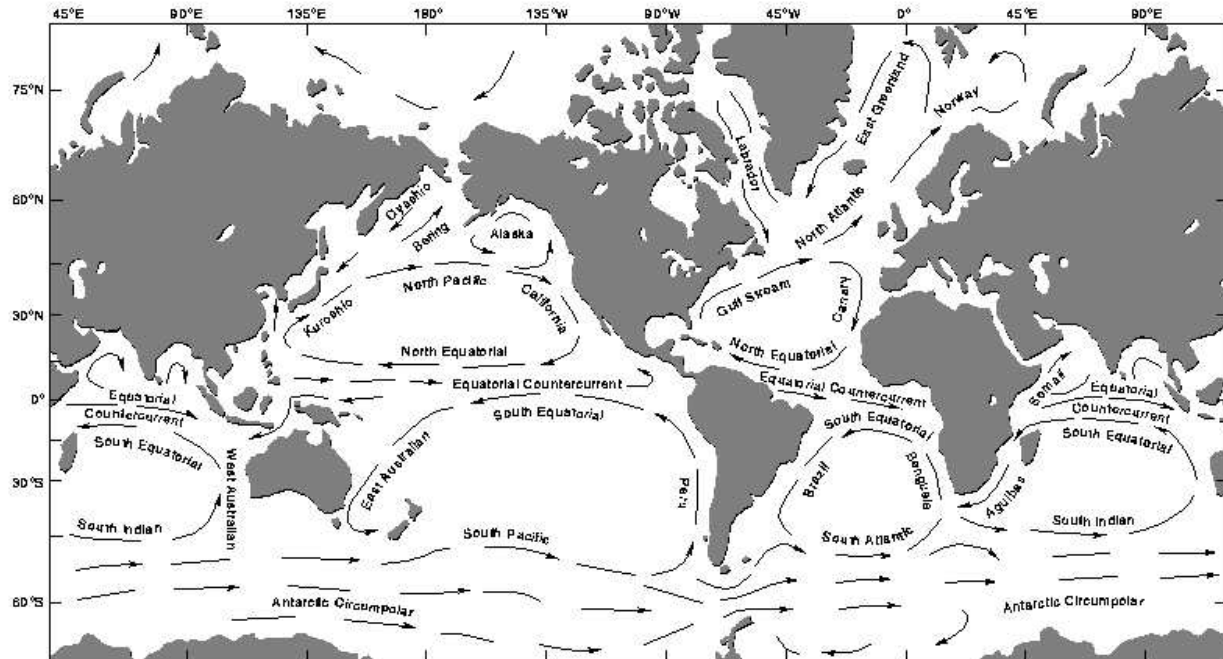


Figura 2.2: *Circulação induzida pelo vento na superfície dos oceanos.* Fonte: <http://geosci.uchicago.edu>.

- entre aproximadamente  $10^\circ$  e  $45^\circ$  de latitude, tanto no HN como no HS, forma-se um giro de circulação anti-ciclônica;
- entre aproximadamente  $45^\circ$  e  $60^\circ$  de latitude forma-se um giro de circulação ciclônica;
- entre  $10^\circ$  N e  $10^\circ$  S forma-se um sistema correntes e contra-correntes equatoriais.

Este esquema de circulação oceânica pode ser observado em quase todos os oceanos, mas é um padrão mais ou menos idealizado. O giro ciclônico é observado principalmente nos oceanos do HN. A figura 2.2 mostra a circulação superficial dos oceanos. Esta circulação está associada ao cisalhamento do vento, induzindo vorticidade na água do mar, como veremos mais adiante no curso.

## 2.5 A Camada de Ekman

Nos dois lados da interface ar/mar existe uma camada dentro da qual a troca de momentum é mais efetiva. Esta camada é chamada “Camada de Ekman”, tanto na atmosfera como no oceano<sup>5</sup>. Na verdade a camada de Ekman existe nas proximidades de qualquer contorno dos oceanos, ou seja, próximo à superfície, próximo ao fundo e próximo a contornos laterais, mas a que nos interessa no momento é a camada superficial. Como a dinâmica da atmosfera é maior, a camada de Ekman pode chegar a centenas de metros de altura, enquanto que no mar não passa de poucas dezenas de metros de profundidade. Dentro da camada de Ekman as mudanças de velocidade são muito bruscas. O decaimento do perfil de velocidade é exponencial, portanto existe a necessidade de uma padronização para as medidas de velocidade do vento, dado que os valores podem ser muito diferentes se medidos a poucos metros de diferença.<sup>6</sup>

Para calcular a transferência de momento do vento para o oceano utiliza-se a tensão do vento sobre a superfície dos oceanos<sup>7</sup>. A tensão (“stress”, em inglês) é representada pela letra grega  $\tau$  (tau). Esta tensão é parametrizada em função da velocidade do vento e da densidade do ar<sup>8</sup>, usando um coeficiente adimensional de arrasto do vento, conforme mostra a equação 2.2

$$\tau = c_d \cdot \rho_{ar} \cdot |V_v| \cdot V_v \quad N \cdot m^{-2} \quad (2.2)$$

onde:

$V_v$  é a velocidade do vento medida a 10 metros de altura;

$\rho_{ar}$  é a densidade do ar;

$c_d$  é o coeficiente de arrasto do vento.

Sobre as superfícies rígidas o valor de  $c_d$  varia de acordo com a rugosidade da superfície. O oceano não é uma superfície rígida, mas oferece resistência ao vento, pois a densidade da água do mar é muito maior que a do ar, por isto, esta desloca-se mais lentamente que o ar. Tipicamente a água do mar se locomove com uma velocidade de aproximadamente 3 % da velocidade do vento. Apesar da diferença brusca de velocidade entre os dois lados da interface ar/mar, a diferença de momento apresenta continuidade, pois devido a sua grande densidade o oceano pode carregar tanto momento quanto a atmosfera<sup>9</sup>. O valor de  $c_d$  muda de acordo com a velocidade do vento ( $V_v$ ). Para valores de  $u$  menores que 6 m/s,  $c_d = 1,1 \times 10^{-3}$  e para valores de  $u$  entre 6 e 22 m/s,  $c_d = (0,61 + 0,0063V_v) \times 10^{-3}$ .

A transferência de momento ao longo da coluna de ar ou água em movimento ocorre através

<sup>5</sup>Ekman é o nome do primeiro autor que quantificou o efeito do vento sobre os oceanos.

<sup>6</sup>Convencionou-se o nível de 10 metros acima da interface ar/mar como o nível padrão para medida de vento. Nem sempre este nível é obedecido, mas para um estudo de modelagem da circulação gerada pelo vento é bom que se observe este nível.

<sup>7</sup>Tensão = força por unidade de área.

<sup>8</sup>Na verdade  $\tau$  é calculado da seguinte forma:  $\tau_{i,j} = \rho \overline{\tilde{v}_i \tilde{v}_j}$ , onde o  $\tilde{v}$  indica os valores turbulentos de  $v$ , a equação 2.2 é apenas uma parametrização.

<sup>9</sup>Lembrem-se que momento é composto de massa e velocidade, se atmosfera apresenta maior velocidade que o oceano, ela apresenta menos massa, portanto as taxas de momento são semelhantes.

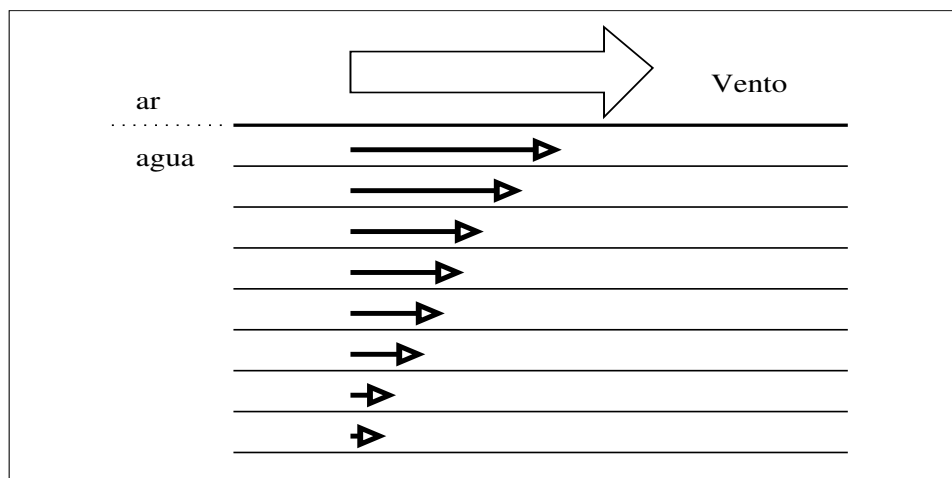


Figura 2.3: *Perfil vertical de corrente de um fluido em movimento laminar.*

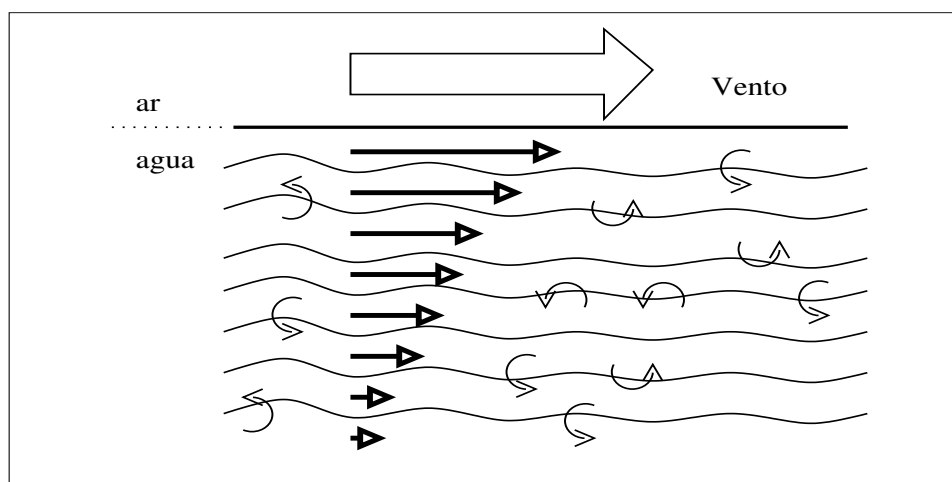


Figura 2.4: *Perfil vertical de corrente de um fluido em movimento turbulento.*

de transferência de energia nos choques entre moléculas. Quando o movimento é laminar, isto é, não é turbulento, as moléculas deslocam-se na forma de camadas paralelas de fluido e a transferência de momento entre camadas é uniforme.

Em cada camada as partículas de fluido movimentam-se com a mesma velocidade, mas no limite entre camadas as partículas da camada superior movimentam-se com velocidade maior, por isto elas se chocam. Ao chocarem-se as partículas das camadas superiores são freiadas e as das camadas inferiores são aceleradas. Desta forma ocorre a transferência de momento para camadas inferiores. Exatamente sobre o fundo, no limite, o movimento é nulo.

Quando o perfil de velocidade é turbulento, movimentos randômicos ocorrem, transportando porções de fluido entre uma camada e outra. Estas porções de fluido transportadas levam momento, resultando em um maior transporte de momento entre camadas e maior homogeneização do fluido. No movimento turbulento, portanto, a transferência de momento é mais eficiente.



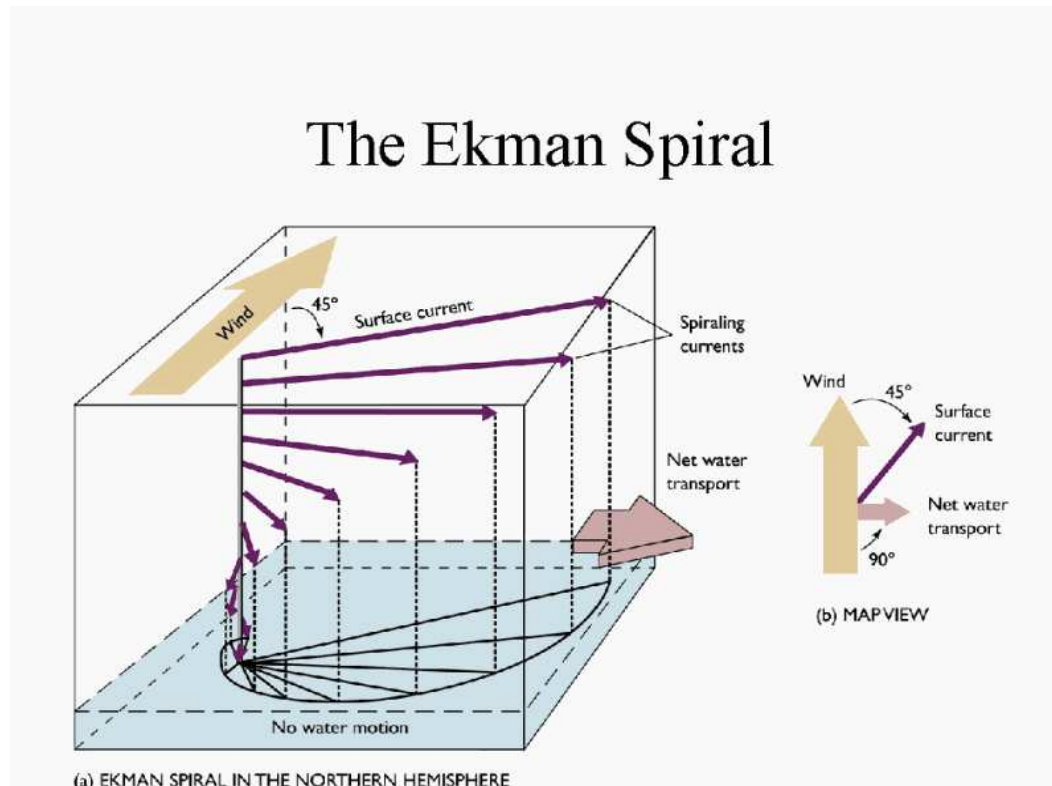


Figura 2.5: Movimento na camada de Ekman superficial dos oceanos. Fonte: <http://www.ccpo.odu.edu>

### 2.5.1 A Camada de Ekman no Oceano

A influência da atmosfera no oceano, em termos de transferência de momento, se restringe às primeiras centenas de metros, sendo que a camada de Ekman propriamente dita (onde a transferência é mais efetiva) ocorre nas primeiras dezenas de metros. Nesta camada a intensidade do movimento diminui com a profundidade. devido ao atrito entre camadas, a eficiência na transferência de momento entre camadas diminui com a profundidade. Ao mesmo tempo existe um giro dos vetores de velocidade devido a força de Coriolis. A camada de água imediatamente na superfície se movimenta com um ângulo de  $45^\circ$  em relação a direção do vento, a direita ou esquerda dependendo do hemisfério. A camada abaixo da camada superficial se desloca com um ângulo a esquerda ou direita desta, e assim sucessivamente cada camada se deflete em relação a camada imediatamente superior, formando uma espiral. Até que no fim da espiral a velocidade é aproximadamente 10 % da velocidade superficial, e o vetor velocidade tem direção contrária a direção da corrente superficial. Esta espiral é chamada “Espirale de Ekman” (figura 2.5) A espiral de Ekman ocorre também na camada de Ekman de fundo, no contato do oceano com o fundo oceânico. O mecanismo de formação das camadas de Ekman será visto no segundo semestre do curso.

## 2.6 Variações nas Taxas de Transferência

As taxas de transferência de momento da atmosfera para o oceano variam em função das variações sazonais dos centros de AP, e consequentes variações de intensidade dos ventos ligados aos APs.

Tome-se como exemplo o Oceano Atlântico

Em fevereiro : verão austral e inverno setentrional.

O aumento da capa de gelo polar (HN) faz com que a AP, originalmente centrada nos Açores, desloque-se para o sul. Os alísios de nordeste chegam então até o equador. No HS a AP desloca-se para o sul e os alísios de sudeste são sentidos no equador apenas próximos a África, conforme pode ser observado na figura 2.6.

Em Agosto : inverno austral e verão setentrional.

No HN a AP volta para os Açores. Os alísios de nordeste alcançam muito pouco além dos  $10^{\circ}$  N. No HS a AP é trazida de volta para sua posição original, pelo desenvolvimento da zona antártica de baixa pressão. Os alísios de sudeste sopram mais intensos próximos ao continente americano e se enfraquecem próximo a África. O centro AP do oceano Atlântico Sul pode se intensificar até se dividir em dois centros menores de AP, e assim os ventos alísios se enfraquecem em boa parte da região equatorial do oceano Atlântico (exceto próximo ao continente americano), conforme pode ser observado na figura 2.7

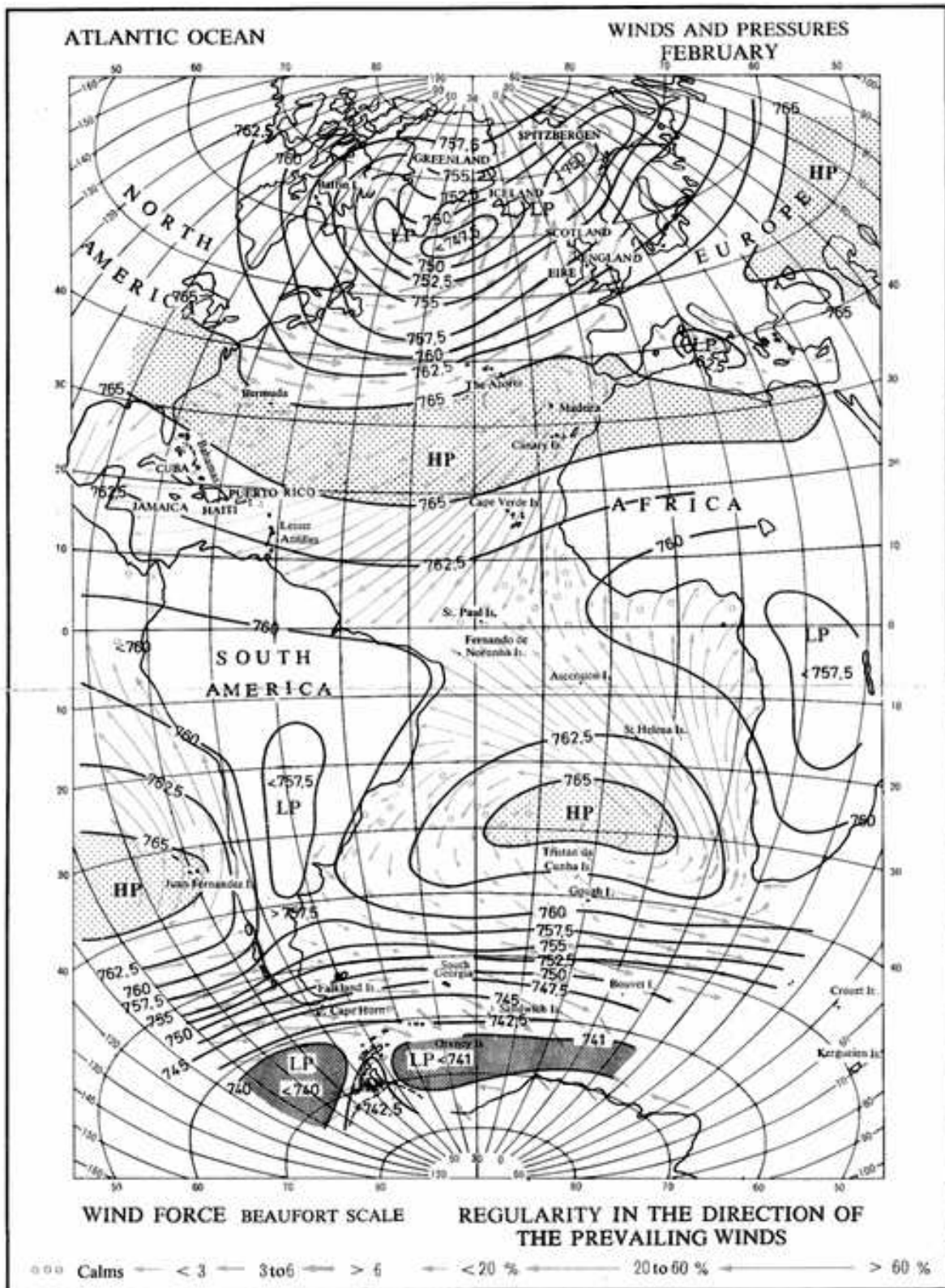


Figura 2.6: Posição dos centros de AP e ventos no oceano Atlântico durante os meses de verão no HS. Fonte: Tchernia, 1980

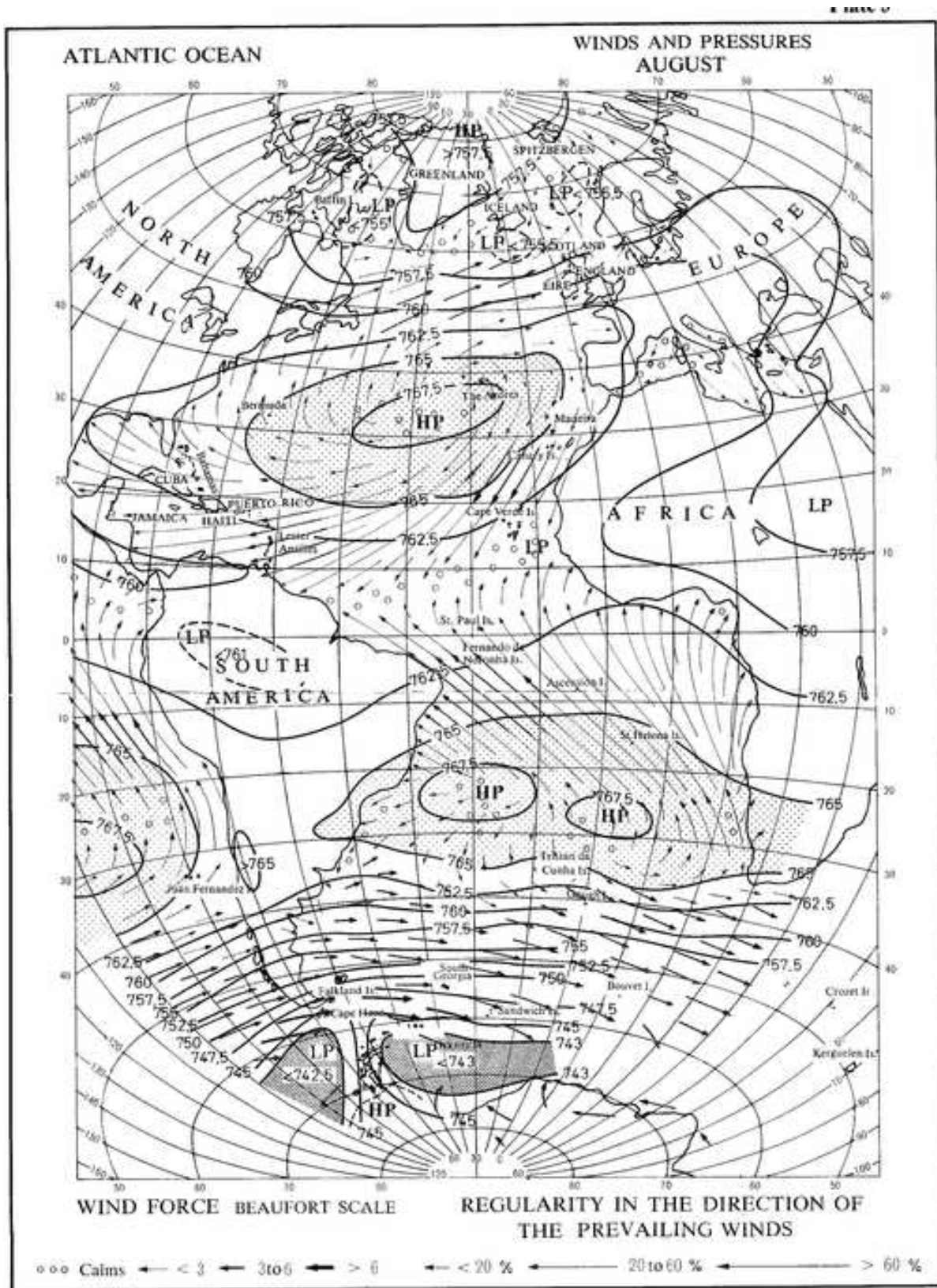


Figura 2.7: Posição dos centros de AP e ventos no oceano Atlântico durante os meses de inverno no HS. Fonte: Tchernia, 1980

Estas variações latitudinais nas posições dos centros de AP fazem que, para um dado local, ocorram variações sazonais na intensidade do vento, e conseqüentemente na taxa de transferência do momento do vento. Além destas variações sazonais globais, variações localizadas e rápidas podem ocorrer. Na passagem de uma frente atmosférica ou de um furacão, por exemplo, a variação na intensidade do vento é brusca e rápida. Então, ao longo do ano, a taxa de transferência de momento pode ser baixa e constante durante longos períodos de tempo e aumentar bruscamente e permanecer alta durante pequenos períodos. Estes curtos períodos são muito eficientes na transferência de momento, pois apesar de curtos a velocidade do vento é muito alta. Em algumas regiões o vento é sempre moderado e constante, como a região dos “doldrums”<sup>10</sup> equatoriais, em outras os ventos são sempre fortes e variados, como na região da “deriva do vento leste” ou na região da “deriva do vento oeste”, propiciando alta taxa de transferência de momento.

---

<sup>10</sup>Região equatorial para onde convergem os ventos alísios

# Capítulo 3

## O Balanço Térmico dos Oceanos

O balanço térmico dos oceanos é calculado pela diferença entre as quantidades de energia ganha e perdida pelos mesmos. A energia ganha vem quase que exclusivamente do Sol, e as perdas de energia ocorrem quase que exclusivamente para a atmosfera, por isto as trocas de calor na interface ar/mar são as grandes responsáveis pelo balanço térmico dos oceanos. Pode-se, no entanto, querer estudar o balanço de calor para a camada oceânica superficial apenas, neste caso é necessário considerar o calor que é trocado com a camada inferior. Ou pode-se, ainda, estudar uma porção limitada do oceano, e neste caso teremos de considerar o calor que é trocado lateralmente por advecção de massas d' água. Vamos a seguir detalhar apenas as trocas de calor pela interface ar/mar. São 4 as formas de troca de calor:

1.  $Q_e$  é o fluxo de calor latente de evaporação, ou seja, é a troca de calor entre oceano e atmosfera ocasionada pelas trocas de vapor d' água (evaporação ou precipitação). Depende da diferença da pressão parcial de vapor d' água entre os dois meios. Como não tem sentido falar em pressão de vapor d' água no oceano, utiliza-se a pressão parcial do vapor que se encontra em uma camada de espessura infinitesimal, logo acima da superfície do mar e que tem a mesma temperatura da água do mar (equação 3.4).
2.  $Q_s$  é o fluxo de calor sensível, ou seja, a troca de calor que ocorre entre os dois meios em função da diferença de temperatura (equação 3.10).
3.  $Q_b$  é o fluxo de calor irradiado na forma de ondas longas pela superfície oceânica, isto é, a energia emanada pelo oceano na forma de radiação REM com comprimento correspondente ao infravermelho. O oceano recebe a energia solar na forma de ondas curtas, se aquece, e emite a radiação na forma de onda longa.  $Q_b$  depende portanto da temperatura da superfície do oceano. As nuvens e o vapor d' água da atmosfera absorvem parte desta radiação emitida pelos oceanos e emite de volta, portanto  $Q_b$  é o resíduo, já descontada a fração emitida de volta pelas nuvens e vapor d' água (equação 3.3).
4.  $Q_i$  é o fluxo de calor em ondas curtas, que chega na superfície do mar, proveniente do sol, isto é, a taxa de absorção da energia solar, descontado o efeito do albedo da água do mar e das núvens (equação 3.2).

Como se trata do balanço de calor para o oceano, considera-se o fluxo de calor do oceano para atmosfera como negativo, pois é uma perda de calor por parte do oceano, e o fluxo da atmosfera para o oceano como positivo.

$$Q = (Q_s + Q_e) + (Q_i - Q_b) \quad (3.1)$$

### 3.1 Equações para Cálculo do Balanço de Calor

$Q_i - Q_b$  é o fluxo residual de radiação.  $Q_i$  deve ser positivo, pois trata-se de um ganho de calor pelos oceanos, e  $Q_b$  negativo.

$$Q_i = Q_{io} \cdot (1 - \alpha) \cdot (1 - 0.7n) \quad W.m^{-2} \quad (3.2)$$

onde:

$Q_{io}$  é a quantidade de irradiação solar por unidade de área, que chega na superfície do mar em condições de céu claro;

$\alpha = 0.06$  é o albedo da superfície do mar;

$n$  é a fração do céu coberta por nuvens.

$Q_{io}$  tem dimensão  $W/m^2$ ,  $\alpha$  e  $n$  são coeficientes adimensionais, portanto  $Q_i$  tem dimensão  $W/m^2$ .

$$Q_b = 0,985 \cdot \gamma \cdot T^4 \cdot (0,39 - 0,05e_{ar}^{1/2}) \cdot (1 - 0,6n^2) \quad W.m^{-2} \quad (3.3)$$

onde:

$\gamma$  é a constante de Stefan - Boltzmann :  $5,67 \times 10^{-8} \quad W.m^{-2}.K^{-4}$ .

$T$  é a temperatura na superfície do oceano, medida em graus Kelvin ( $K$ ).

$e_{ar}$  é a pressão parcial do vapor d'água na atmosfera, medida em milibar ( $mb$ ).

$n$  é a porcentagem do céu coberta por núvens.

$(0,39 - 0,05e_{ar}^{1/2})$  é um fator de correção que leva em consideração a porcentagem de  $Q_b$  que é absorvida pelo vapor d'água da atmosfera e re-emitida em direção ao oceano. Este fator é adimensional. Trata-se de uma relação entre  $Q_b$  e  $e_{ar}$ , na qual o primeiro é o  $y$  da equação e o segundo o  $x$ , portanto o resultado é medido em unidades de  $Q_b$ .

$(1 - 0,6n^2)$  é um fator de correção que leva em consideração o efeito das nuvens. Este fator também é adimensional, portanto a unidade de medida de  $Q_b$  é  $W/m^2$ .

$e_{ar}$  é calculado em função da diferença entre as medidas de temperatura do ar feitas por um termômetro de bulbo seco e outro de bulbo úmido - equação 3.8.

$$Q_e = Lv.E \quad W.m^{-2} \quad (3.4)$$

onde:

$Lv$  é o calor latente de vaporização da água =  $2,5 \times 10^6 \quad J.kg^{-1}$

$E$  é a taxa de evaporação (equação 3.5), calculada em função da diferença da pressão parcial do vapor d'água no ar e no oceano<sup>1</sup>.

$$E = \rho_{ar}.c_e.V_v.(he_{ar} - he_{mar}) \quad (3.5)$$

onde:

$\rho_{ar}$  é a densidade do ar, medida em  $kg/m^3$ .

$c_e$  é um coeficiente adimensional =  $1,5 \times 10^{-3}$ .

$V_v$  é a velocidade do vento, medida em  $m/s$ .

$he_{ar}$  é a umidade específica do ar;

$he_{mar}$  é a umidade específica do ar na camada infinitesimal logo acima da superfície do mar;

$he$  é uma razão entre a massa de vapor d'água contida no ar e a massa de ar. Normalmente é expresso em função da razão entre a pressão parcial do vapor d'água e a pressão atmosférica (ambas medidas em  $mb$ ).

$$he_{ar} = \epsilon \cdot \frac{e_{ar}}{p} \quad (3.6)$$

$$he_{mar} = \epsilon \cdot \frac{e_{mar}}{p} \quad (3.7)$$

$\epsilon$  é um coeficiente que expressa a razão entre a massa molecular do vapor d'água e a massa molecular do ar seco, equivale a 0,622.

No ar a pressão parcial de vapor d'água é calculada de acordo com a equação 3.8.

$$e_{ar} = e_s - A.p.(T_{bs} - T_{bu}) \quad mb \quad (3.8)$$

onde:

$e_s$  é a pressão do vapor d'água no ar úmido saturado, na temperatura  $T_{bu}$ .

$A$  é a constante psicrométrica =  $0,0008 \quad ^\circ C^{-1}$ .

$p$  é a pressão atmosférica, medida em  $mb$ .

$T_{bs}$  é a temperatura do termômetro de bulbo seco, medida em graus Kelvin ( $K$ ).

$T_{bu}$  é a temperatura do termômetro de bulbo úmido, medida em  $K$ .

---

<sup>1</sup>Esta fórmula é resultado de modelo (parametrização), pois na teoria a taxa de evaporação é expressa da seguinte forma:  $E = \rho.p.\tilde{q}.\tilde{v}$ , onde  $\tilde{q}$  e  $\tilde{v}$  indicam a parte turbulenta dos fatores umidade e velocidade do ar



Na camada logo acima da superfície do mar  $e$  é calculado de forma empírica através da expressão formulada por Murray (1967), a qual leva em consideração a temperatura na superfície do mar ( $T_{mar}$ ), medida em Kelvin (equação 3.9).

$$e_{mar} = 6.1078 \exp\left(\frac{17.3(T_{mar} - 273.16)}{T_{mar} - 35.86}\right) \quad (3.9)$$

$E$  tem dimensão de  $kg/m^2.s$ . Mede a quantidade de água evaporada por unidade de área, por unidade de tempo.

$Q_e$  tem portanto unidade  $W/m^2$ , pois  $J/s$  é transformado em  $W$  ( $1 \text{ Joule} = 2,778 \times 10^{-7} kWh$ ).

O valor de  $e_s$  varia em função da temperatura do ar. Alguns valores são apresentados na tabela 3.1

T(° C)	$e_s$ (mb)
-20	1,2
-10	2,9
0	6,1
5	8,7
10	12,2
15	17,0
20	23,3
25	31,6

Tabela 3.1: *Variação da pressão de vapor d'água de saturação em função da temperatura.*

$$Q_s = \rho_{ar} \cdot c_p \cdot c_H \cdot V_v (T_{ar} - T_{mar}) \quad W.m_{-2} \quad (3.10)$$

onde:

$\rho_{ar}$  é a densidade do ar :  $1,3 \quad kg/m^3$ .

$c_p$  é o calor específico do ar :  $1.004 \quad J.kg^{-1}.K^{-1}$ .

$c_H$  é o coeficiente de arrasto, o qual é adimensional.

$T_{mar}$  é a temperatura na superfície do mar, medida em Kelvin.

$T_{ar}$  é a temperatura do ar acima da superfície do oceano, medida em Kelvin.

$V_v$  é a velocidade do vento, medida em  $m/s$ .

$c_H$  tem valores diferentes em função do estado do mar :

$c_H = 0,83 \times 10^{-3}$  se o tempo está estável e  $c_H = 1,1 \times 10^{-3}$  se o tempo é instável.

Note que  $Q_b$  depende apenas da temperatura do mar, enquanto que  $Q_e$  e  $Q_s$  dependem da diferença de umidade relativa e temperatura entre o oceano e a atmosfera<sup>2</sup>. Isto faz com que

<sup>2</sup>Novamente, esta fórmula é um modelo, em teoria o fluxo de calor sensível é expresso em função dos valores turbulentos de  $V_v$  e  $T$   $Q_s = \rho_{ar} \cdot \tilde{V}_v \cdot \tilde{T}$

o fluxo de  $Q_b$  seja sempre em direção a atmosfera e o de  $Q_e$  e  $Q_s$  pode variar, dependendo das diferenças de  $T$  ou  $e$  serem positivas ou negativas.

Observando-se as fórmulas acima percebe-se que apenas com dados de temperatura da superfície do mar e dados meteorológicos simples, como: temperatura do ar (termômetros de bulbo seco e bulbo úmido), velocidade do vento, pressão parcial de vapor d'água e fração coberta do céu, pode-se calcular o balanço de radiação dos oceanos, ou de um lugar em particular no oceano.

## 3.2 Evaporação (Fluxo de Calor Latente)

Com base nas fórmulas de  $Q$  e  $E$ , Budiko e Jacobs<sup>3</sup> calcularam a evaporação para diversos pontos dos oceanos e construíram cartas de evaporação e fluxo de calor latente para todos os oceanos, em diversas épocas do ano. As principais conclusões obtidas a partir destas cartas são :

1. A taxa de evaporação é, em quase todos os lugares, maior no inverno. Isto ocorre devido a velocidade do vento e a diferença entre a pressão parcial do vapor d'água no ar e no mar serem maiores durante as estações frias do ano.
2. Os maiores valores sazonais de  $Q$  são achados próximos aos limites oeste dos oceanos Atlântico Norte e Pacífico Norte durante o inverno no Hemisfério Norte. O fluxo de  $Q_e$  sobre a corrente do Golfo no inverno chega a  $1,14 \text{ g/cm}^2.\text{dia}$ , e sobre a corrente de Kuroshio  $0,94 \text{ g/cm}^2.\text{dia}$ . Durante o inverno os ventos são constantes e estão sempre trazendo o ar seco e frio dos continentes para o oceano, sobre estas correntes. Durante o verão os ventos predominantes sopram para sul, então as diferenças entre a pressão parcial de vapor d'água no ar e no mar são menores.
3. As variações sazonais de  $Q_e$  não são, em lugar nenhum da Terra, tão grandes quanto nos sistemas Kuroshio e Golfo. No limite leste dos oceanos as variações sazonais são muito menores, por que durante o ano todo os ventos predominantes advectam ar marinho.

## 3.3 Fluxo de Calor Sensível

De acordo com Jacobs a distribuição global de  $Q_s$  acompanha mais ou menos a distribuição de  $Q_e$ , exceto que a taxa de troca de  $Q_s$  na zona tropical não é como a de  $Q_e$ . O quociente  $Q_s/Q_e$ , conhecido como coeficiente de Bowen ( $\beta$ ), pois foi Bowen que o calculou pela primeira vez, é mais ou menos constante, variando 0,1 nas baixas latitudes, 0,45 a  $70^\circ \text{ N}$  de latitude e 0,23 a  $70^\circ \text{ S}$ . A primeira conclusão que se chega a partir destes dados é que: o fluxo de calor sensível é geralmente alto em altas latitudes e diminui em direção equador.

---

<sup>3</sup>Budiko e Jacobs *in* Harvey, 1976

Este fenômeno pode ser explicado pela diferença de temperatura entre o oceano e a atmosfera: as correntes que levam água tropical em direção aos polos são as responsáveis, pois elas carregam água quente para regiões onde o ar é frio, contribuindo para que haja uma grande diferença entre as temperaturas do ar e do mar.

Também no limite oeste dos oceanos ocorrem as maiores taxas de  $Q_s$ , principalmente no inverno do HN, quando o ar frio dos continentes sopra sobre o oceano. O fluxo de calor sensível no inverno geralmente ultrapassa  $300 \text{ cal/cm}^2.\text{dia}$ , sobre as correntes do Golfo e Kuroshio. O fluxo de  $Q_s$  da corrente do Golfo para a atmosfera pode ser tão alto no inverno, que uma coluna de ar de 1.500 m de altura, vinda do continente e passando sobre esta corrente, absorvendo esta taxa de calor, poderia ter a sua temperatura aumentada em  $8^\circ \text{C}$ , em 1 dia.

## Capítulo 4

# As Forças que Atuam nos Oceanos

*“As forças que atuam no oceano são a expressão analítica das interações deste com sua vizinhança.”*

Isto é, das interações do oceano com a atmosfera, o fundo oceânico, os continentes, e os astros Sol e Lua, resultam os movimentos que pretendemos descrever matematicamente. Os processos que foram descritos até agora e que ainda serão abordados mais detalhadamente, ou seja, a absorção da energia solar gerando os movimentos atmosféricos e conseqüentemente as correntes oceânicas forçadas por vento, assim como os movimentos causados diretamente no oceano por absorção da radiação solar pela água, serão representados na forma de forças. Como vimos, a absorção diferenciada da radiação solar gera gradientes de densidade, aos quais estão associados gradientes de pressão. A atuação do vento na superfície dos oceanos gera inclinações da interface ar/mar, as quais também estão associados gradientes de pressão. Os gradientes de pressão no mar causam movimentos, pois a água fluirá sempre da área de maior para a área de menor pressão. Portanto sempre associamos uma força a um gradiente de pressão: a **Força do Gradiente de Pressão** (força que causa o movimento da maior para a menor pressão). Além disto o arrasto do vento sobre a superfície da água transfere momento do vento para a água, esta transferência se dá através do atrito (tensores de Reynolds), por isto a **Força de Atrito do Vento** sobre os oceanos (tensão do vento) é também um dos causadores do movimento. Esta força é a representação analítica de uma interação entre a atmosfera e o oceano. A força de atrito ocorre não só entre o vento e o oceano, mas entre quaisquer duas camadas que apresentam movimento relativo, portanto ocorre também entre camadas de água que estejam se locomovendo com velocidade diferente, e entre a água e o fundo oceânico. O atrito entre as várias camadas d'água do oceano é responsável pela transferência do momento (adquirido a partir do vento) para profundidades maiores. E o atrito com o fundo freia o movimento.

A terceira maneira como o movimento pode ser causado é através da interação gravitacional. Toda partícula/molécula em suspensão no oceano está sendo atraída, na mesma intensidade que ela atrai, todos os astros a sua volta, mas principalmente a Terra, a Lua e o Sol. A atração gravitacional da Terra sobre esta partícula se expressa na forma da **Força Peso** e a atração gravitacional da Lua e do Sol se expressa na forma das **Forças Geradoras de Maré**.

No entanto, como vamos descrever o movimento a partir de um referencial não inercial, pois estamos na superfície da Terra e a mesma está em rotação, devemos levar em consideração forças fictícias, que aparecem por causa da rotação do referencial. Como o próprio nome diz, não são realmente forças, mas um efeito da rotação do referencial. Estas forças são a **Força de Coriolis** e a **Força Centrífuga**.

Levando em consideração o tipo de interação que dá origem a força, dividimos as forças que atuam nos oceanos em dois tipos:

1. Forças Primárias: aquelas que causam movimento, incluem:  
Força do Gradiente de Pressão  
Força de Atração Gravitacional  
Força de Atrito do Vento
2. Forças Secundárias: aquelas que resultam do movimento, incluem:  
Forças Fictícias (F. Coriolis e F. Centrífuga)  
Força de Atrito entre Camadas de Água e Atrito com o Fundo

Para distinguir as duas forças de atrito chamaremos a primeira de Força de Arrasto do Vento e a segunda de Força de Fricção. Forças de outras origens podem causar movimento nos oceanos, como as Forças Sísmicas, por exemplo, mas estas são desprezíveis em relação às forças citadas acima. Alguns autores adotam outro tipo de classificação das forças, como **Forças de Corpo** (ou Força de Volume) e **Forças de Superfície** (ou Força de Contacto), sendo as primeiras aquelas que agem a distância, como por exemplo Força de Atração Gravitacional, e as últimas aquelas que agem quando existe contato, como por exemplo Força de Atrito. As forças podem ainda ser classificadas de acordo com uma classificação mais básica, utilizada em Física, que divide-as em quatro tipos básicos:

1. forças gravitacionais (relativamente fracas)
2. forças eletromagnéticas (intensidade intermediária)
3. forças nucleares (as mais fortes de todas)
4. forças de interação fraca (que atuam em subpartículas atômicas)

Todas as forças podem ser classificadas como formas de manifestações destes tipos básicos. Porém, neste curso de Dinâmica dos Oceanos adotaremos a classificação apresentada anteriormente, que divide as forças em primárias e secundárias.

Todas estas forças precisam ser colocadas em forma diferencial para que possamos utilizá-las nas equações diferenciais que representam o movimento, por isto faremos a descrição da atuação das mesmas em um elemento de volume ( $dV$ ), com dimensões infinitesimais. Como se o oceano fossem composto por milhões de elementos infinitesimalmente pequenos e a atuação das forças ocorresse individualmente, em cada elemento, mas que o resultado fosse sentido como um todo. Este procedimento é necessário para que possamos utilizar as equações diferenciais.

## 4.1 Força de Atração Gravitacional

Por definição, quaisquer dois corpos se atraem na razão direta de suas massas e razão inversa do quadrado da distância entre eles. Esta é a Lei Universal Gravitacional de autoria de Isaac Newton, expressa na equação 4.1.

$$F_{ag} = \frac{\Gamma M_1 M_2}{d^2} \quad (4.1)$$

Na equação 4.1  $F_{ag}$  refere-se ao módulo da força de atração gravitacional entre os corpos de massa  $M_1$  e  $M_2$  separados por uma distância  $d$ .  $\Gamma$  é a constante de gravitação equivalente a  $6,658 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

Para o nosso elemento de volume  $dV$ , que consideramos como sendo uma partícula de água de massa unitária no meio do oceano, três são as forças de atração gravitacional particularmente importantes: a força de atração gravitacional da Terra sobre  $dV$ , a força de atração gravitacional da Lua e a do Sol. A atração gravitacional da Terra sobre o elemento  $dV$  é a **Força Peso**, que dá origem a aceleração da gravidade. As forças de atração gravitacional do Sol e da Lua é o que conhecemos por **Forças Geradoras de Maré**, as quais dão origem as marés astronômicas no oceano. As oscilações da superfície do mar causadas pelas marés e as correntes de maré, causadas pela interação da onda de maré com o fundo oceânico, são um movimento extremamente determinístico e preditivo, cujo período é menor do que aquele dos movimentos enfocados em dinâmica dos oceanos. Por essa razão, as marés são estudadas separadamente, no curso de ondas e marés.

### 4.1.1 Força Peso (Gravidade)

No caso de analisarmos a força gravitacional da Terra sobre  $dv$  (força Peso) então a Lei de Gravitação passa a ser escrita:

$$F_{ag} = \frac{\Gamma M_T M_{dv}}{d^2} \quad (4.2)$$

onde:

$M_T$  é a massa da Terra,

$M_{dv}$  é a massa do elemento  $dv$ ,

$\Gamma$  é a constante gravitacional de Newton..

No entanto, a distância  $d$  agora considerada é o raio da Terra, pois esta é a distância entre o elemento  $dv$  e o centro da Terra. Esta força, quando considerada por unidade de massa <sup>1</sup>, pode ser representada por um **potencial gravitacional**, o qual é calculado pelo gradiente do geopotencial ( $\Phi$ ) <sup>2</sup>, como mostra a equação 4.3.

<sup>1</sup> Ao considerarmos a  $F_{ag}$  por unidade de massa estamos calculando a força que age sobre cada elemento de massa unitária da Terra

<sup>2</sup> O geopotencial é o campo gravitacional ao redor da Terra, que é reconhecido como um potencial gravitacional por que existe mesmo que não exista nenhum corpo para ser atraído.

$$\frac{\vec{F}_{ag}}{M_{dv}} = -\nabla\Phi \quad (4.3)$$

Portanto, em módulo, o potencial gravitacional terrestre vale:

$$|\nabla\Phi| = \frac{\Gamma M_T}{r_T^2} \quad (4.4)$$

Em observação a segunda lei de Newton, o módulo da aceleração da gravidade ( $g$ ) é calculado dividindo-se o módulo da força Peso pela massa do elemento  $dv$ , portanto o módulo de  $g$  equivale ao módulo de  $\nabla\Phi$ , conforme calculado pela equação 4.4. (equação 4.5).

$$g = \frac{\Gamma M_T}{r_T^2} \quad (4.5)$$

onde:  $r_T$  é o raio da Terra.

Observadas as unidades de  $\Gamma$ ,  $d$  e  $M_T$  no sistema internacional verificaremos que  $g$  tem como unidade  $m/s^2$ , enquanto que  $F_{ag}$  tem como unidade  $N$ . Se o elemento  $dv$  não estiver na superfície do mar, mas sim a uma profundidade  $z$ , então teremos:

$$g = \frac{\Gamma(M_T - \Delta M)}{(r_T - z)^2} \quad (4.6)$$

onde:  $\Delta M$  representa a massa da calota esférica terrestre acima do nível de profundidade  $z$

Para fazer o cálculo de  $\Delta M$  fazemos a massa da Terra menos a massa de uma esfera terrestre que tem o raio  $(r_T - z)$ . A massa desta esfera terrestre é calculada multiplicando-se o volume da mesma pela densidade da Terra, considerando que a Terra tem uma densidade uniforme<sup>3</sup>.

$$\Delta M = M_T - (\rho_T \cdot 4/3 \cdot \pi \cdot (r_T - z)^3) \quad (4.7)$$

onde:

$$\rho_T = \frac{M_T}{4/3 \cdot \pi \cdot r_T^3} \quad (4.8)$$

ou seja,

$$\Delta M = M_T - M_T(1 - z/r_T)^3 \quad (4.9)$$

e

$$M_T - \Delta M = M_T(1 - z/r_T)^3 \quad (4.10)$$

$$g = \frac{\Gamma M_T(1 - z/r_T)^3}{(r_T - z)^2} \quad (4.11)$$

---

<sup>3</sup>A densidade uniforme da Terra é calculada dividindo-se a massa terrestre pelo volume de uma esfera com raio igual ao raio da Terra, desprezando-se as variações na distribuição de massa ao longo do globo terrestre.

Chamaremos de  $g_0$  a gravidade medida ao nível médio do mar, assim:

$$g = g_0 - \frac{\Gamma M_T}{r_T^3} z \quad (4.12)$$

Se desprezarmos a elipsidade da Terra e a considerarmos como totalmente esférica, podemos dizer que  $g$  é constante na superfície da Terra. Considerando como raio médio da Terra o valor  $r_T = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$  e a massa da Terra  $M_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$  o valor de  $g$ , ao nível da superfície média do mar, será 9,812194. Para outros níveis, abaixo da superfície, o valor de  $g$  é calculado de acordo com a fórmula 4.12. No entanto, existem variações da aceleração da gravidade causadas por variações na distribuição de massa na crosta terrestre e por variações do raio da Terra, por que na realidade a Terra tem o formato elíptico e não esférico. Em função destas variações o campo de gravidade ao redor da Terra não é uniforme, mas apresenta deformações. Por isto, para trabalhos que necessitam de uma grande precisão do campo gravitacional terrestre, defini-se o que é chamado de **geóide**, ou seja, superfícies arbitrarias ao redor da Terra, ao longo das quais o potencial gravitacional terrestre ( $\nabla\Phi$ ) é constante. A aceleração da gravidade é sempre normal (apontando em direção ao centro de massa da Terra) às superfícies de geopotencial constante, em cada ponto do geóide, e apresenta valor constante ao longo destas superfícies. A superfície de geopotencial constante na aceleração da gravidade vale  $9,8 \text{ m/s}^2$  mais ou menos coincide com o nível médio do mar<sup>4</sup>.

## 4.2 Força do Gradiente de Pressão

Sempre que houver um gradiente de pressão (GP) ao longo de um plano no mar deverá haver movimento na direção deste plano, com sentido contrário ao gradiente, ou seja, da maior para a menor pressão. Trabalhando no elemento de volume  $dv$  o GP será avaliado pela diferença nas pressões exercidas em cada face do elemento. Assim um gradiente na direção  $x$ , por exemplo, é calculado pela diferença nas pressões exercidas em duas das faces do elemento cúbico (com arestas  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ ), as duas faces normais ao eixo  $x$ <sup>5</sup>. Utilizamos a pressão exercida no ponto central de cada face, conforme mostra a figura 4.1. Nesta figura o GP no ponto  $x$  é calculado em função da diferença entre as pressões exercidas nas faces situadas em  $x - dx/2$  e  $x + dx/2$ .

A pressão ( $P$ ) exercida nas faces  $x + dx/2$  e  $x - dx/2$  é calculada em função da pressão no ponto  $x$  através de séries de Taylor (equações 4.13 e 4.14). Esta pressão ( $P$ ) é a pressão exercida no ponto central das respectivas faces, perpendiculares ao eixo  $x$ . A distância entre estas faces é  $dx$  e a distância entre as faces e o ponto  $x$ , para o qual a força do GP está sendo calculada, é  $dx/2$ .

---

<sup>4</sup>Em oceanografia normalmente utilizamos as superfícies de geopotencial constante como referencia para cálculos de inclinação da superfície do mar e gradientes de pressão.

<sup>5</sup>Os gradientes nas direções  $y$  e  $z$  são calculados pelas diferenças nas pressões exercidas nas faces normais aos eixos  $y$  e  $z$ , respectivamente.



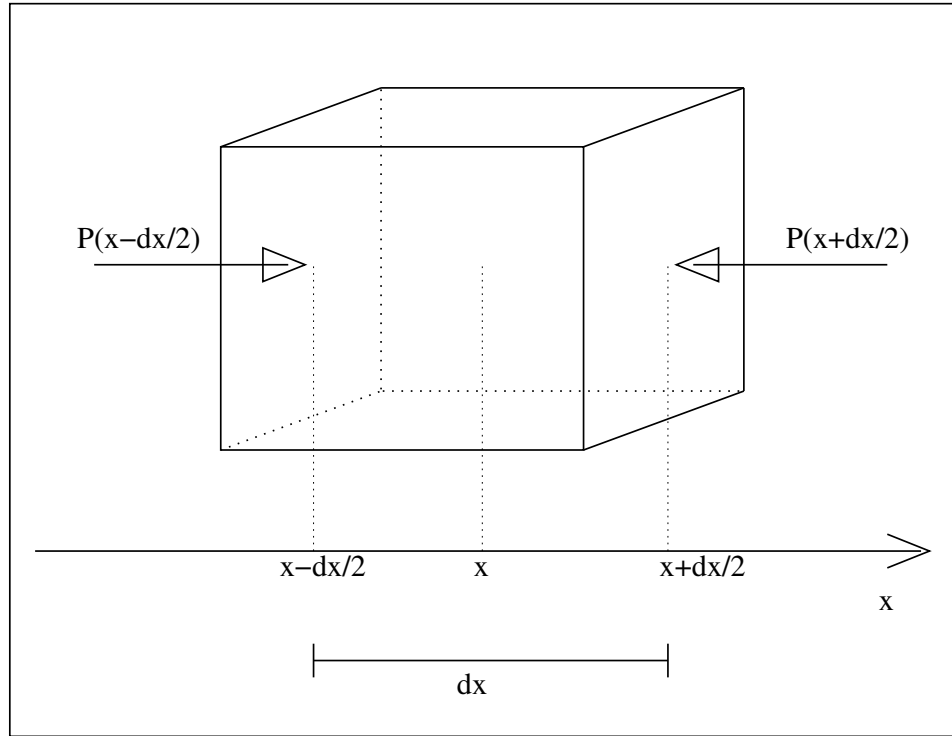


Figura 4.1: Pressões exercidas nas faces do elemento de volume  $dv$  na direção  $x$ .

$$P(x + dx/2) = P(x) + \frac{\partial P}{\partial x} dx/2 + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{(dx/2)^2}{2!} + \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \frac{(dx/2)^3}{3!} + \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \frac{(dx/2)^4}{4!} + \dots \quad (4.13)$$

e

$$P(x - dx/2) = P(x) - \frac{\partial P}{\partial x} dx/2 + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \frac{(dx/2)^2}{2!} - \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \frac{(dx/2)^3}{3!} + \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \frac{(dx/2)^4}{4!} - \dots \quad (4.14)$$

Desprezamos os termos de ordem 2 ou maior, pois trabalhamos com  $dx$  extremamente pequenos (infinitesimais) que quando elevados a potencia de 2 ou maior ficam menores ainda. Assim ficamos com :

$$P(x + dx/2) = P(x) + \frac{\partial P}{\partial x} dx/2 \quad (4.15)$$

e

$$P(x - dx/2) = P(x) - \frac{\partial P}{\partial x} dx/2 \quad (4.16)$$

Assim, a diferença entre as pressões nas duas faces, ou seja o gradiente de pressão na direção  $x$  ( $GP_x$ ) é:

$$GP_x = P(x + dx/2) - P(x - dx/2) = \frac{\partial P}{\partial x} dx \quad (4.17)$$

A força do  $GP_x$  é calculada multiplicando o gradiente pela área da face perpendicular ao mesmo:

$$F_{GP_x} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx\right) dy \cdot dz \quad (4.18)$$

Ao considerarmos as 3 dimensões teremos:

$$F_{GP} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx\right) dy \cdot dz + \left(\frac{\partial P}{\partial y} dy\right) dx \cdot dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} dz\right) dx \cdot dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right) dx \cdot dy \cdot dz \quad (4.19)$$

$$F_{GP} = \nabla P \cdot dv \quad (4.20)$$

pois  $dv = dx \cdot dy \cdot dz$ .

### 4.3 Força de Atrito

Como vimos a Força de Arrasto do Vento e a Força de Fricção entre camadas de água são as duas formas de atrito, a primeira faz a transferência de momento do vento para a camada superficial de água e a segunda faz a transferência para as diversas camadas de água abaixo da camada superficial <sup>6</sup>. A resistência da água ao movimento induzido pelo vento gera um decaimento da velocidade com o aumento da profundidade. Esta resistência ao movimento é causada pela **viscosidade** e o decaimento de velocidade é conhecido como **cisalhamento**. O fato de haver cisalhamento de velocidade faz com que cada camada de fluido desloque-se com velocidade diferente, gerando tensões tangenciais no limite entre as camadas. Fisicamente falando, o que acontece é que a quantidade de movimento transportada pelas moléculas em movimento irregular nas imediações da interface entre camadas é transferida de uma camada para outra, e o agente “transferidor” de momento é a tensão entre moléculas <sup>7</sup>. De acordo com a Lei de Newton sobre o atrito em fluidos “o atrito entre camadas de fluido depende linearmente do cisalhamento de velocidade”. Podemos reproduzir o cisalhamento de velocidade através de um experimento muito simples: deslocando uma placa de área  $A$ , sobre uma camada de fluido com espessura  $H$ , com velocidade constante  $V_o$ , verificamos que a placa induz movimento na água. Exatamente abaixo da placa a água se desloca com velocidade  $V_o$  e exatamente sobre o fundo a velocidade é nula. A força que induz o movimento no fluido e que é necessária para manter a placa em movimento uniforme é proporcional a:

- área da placa  $A$ ,

---

<sup>6</sup>Podemos analisar o movimento como se o mesmo estivesse ocorrendo na forma de infinitas camadas de espessura infinitesimal. Caso não haja movimento através das interfaces entre camadas então o movimento é laminar, caso contrário o movimento é turbulento.

<sup>7</sup>No caso do movimento ser turbulento a transferência de momento entre as diversas camadas de fluido se dá pela ação dos movimentos turbulentos, os quais são muito mais eficientes na transferência de momento, pois transferem parcelas de fluido de uma camada para outra.

- a velocidade  $V_o$  e
- ao inverso da distância entre a placa e o fundo  $H$ .

$$F = \mu \frac{A \cdot V_o}{H} \quad (4.21)$$

$\mu$  é um coeficiente de proporcionalidade, relacionado com a viscosidade do fluido, e portanto denominado de “*coeficiente dinâmico de viscosidade*”.

A tensão ( $\tau$ ), responsável pela transferência de momento, é calculada dividindo-se a força  $F$ , da equação 4.21 pela área da placa:

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{V_o}{H} \quad (4.22)$$

Tensões análogas existem entre as diversas camadas de fluido, porém ao considerarmos a espessura infinitesimal das camadas a equação 4.22 torna-se:

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.23)$$

Neste caso, equação 4.23, estamos considerando que o movimento ocorre na direção  $x$ , portanto trata-se do cisalhamento da componente “ $u$ ” da velocidade ao longo da vertical ( $z$ ). Por isso utilizamos o subscrito “ $xz$ ”. Podemos estrapolar o resultado deste tipo de experimento para o oceano, porém teremos cisalhamento nas 3 direções do espaço. Lembrando que a velocidade é grandeza vetorial, que no espaço tri-dimensinal tem 3 componentes ( $u, v, w$ ), teremos então 9 tensões diferentes, correspondentes ao cisalhamento nas direções  $x, y, z$  de cada uma das componentes da velocidade:

1.  $\tau_{xx} = \mu \frac{du}{dx}$
2.  $\tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy}$
3.  $\tau_{xz} = \mu \frac{du}{dz}$
4.  $\tau_{yx} = \mu \frac{dv}{dx}$
5.  $\tau_{yy} = \mu \frac{dv}{dy}$
6.  $\tau_{yz} = \mu \frac{dv}{dz}$
7.  $\tau_{zx} = \mu \frac{dw}{dx}$
8.  $\tau_{zy} = \mu \frac{dw}{dy}$
9.  $\tau_{zz} = \mu \frac{dw}{dz}$

Em cada uma das tensões de cisalhamento acima  $\tau_{nm}$  é um tensor, conhecido como **Tensor de Reynolds**

A **Força de Atrito** que ocorre devido ao movimento relativo das camadas é uma resultante das tensões de cisalhamento, ou seja, um gradiente das tensões, sendo que cada componente da força de atrito é um gradiente de  $\tau$  em uma das direções do espaço. Referindo-nos novamente ao elemento de volume  $dv$  (figura 4.2) para calcular o gradiente de  $\tau$  nas direções  $x, y, z$ . Começando com a direção  $x$  teremos: a resultante de  $\tau_{xx}$  na direção  $x$  é  $\tau_{xx}$  no ponto central da face  $x + dx/2$  menos  $\tau_{xx}$  no ponto central da face  $x - dx/2$ . Porém o valor de  $\tau_{xx}$  nos pontos de coordenadas  $x + dx/2$  e  $x - dx/2$  é calculado a partir do valor desta tensão no ponto central do elemento  $dv$ , ponto de coordenada  $x$ , através de uma expansão em série de Taylor:

$$\tau_{xx}(x + dx/2) = \tau_{xx}(x) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \cdot dx/2 + \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial x^2} \cdot \frac{(dx/2)^2}{2!} + \frac{\partial^3 \tau_{xx}}{\partial x^3} \cdot \frac{(dx/2)^3}{3!} + \dots \quad (4.24)$$

$$\tau_{xx}(x - dx/2) = \tau_{xx}(x) - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \cdot dx/2 + \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial x^2} \cdot \frac{(dx/2)^2}{2!} - \frac{\partial^3 \tau_{xx}}{\partial x^3} \cdot \frac{(dx/2)^3}{3!} + \dots \quad (4.25)$$

A resultante de  $\tau_{xx}$  na direção  $x$  é feita diminuindo-se a equação 4.25 da equação 4.24, ou seja:

$$\tau_{xx}^R = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \cdot dx + TO3 + \dots \quad (4.26)$$

onde: TO3 significa Termos de ordem 3.

Os termos de ordem par são eliminados na subtração. Desprezamos os termos de ordem 3 e maior, pois são pequenos comparados ao termo de primeira ordem, assim ficamos com:

$$\tau_{xx}^R = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \cdot dx \quad (4.27)$$

A componente  $x$  de  $\tau$  é então a soma dos gradientes das tensões  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$ , ou seja:

$$\tau_X = \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) \cdot dx \quad (4.28)$$

E, como sabemos, uma força é uma tensão multiplicada pela área, portanto a componente da força de atrito na direção  $x$  será a tensão da equação 4.28 multiplicada pela área da face normal ao eixo  $x$ :

$$F_X = \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (4.29)$$

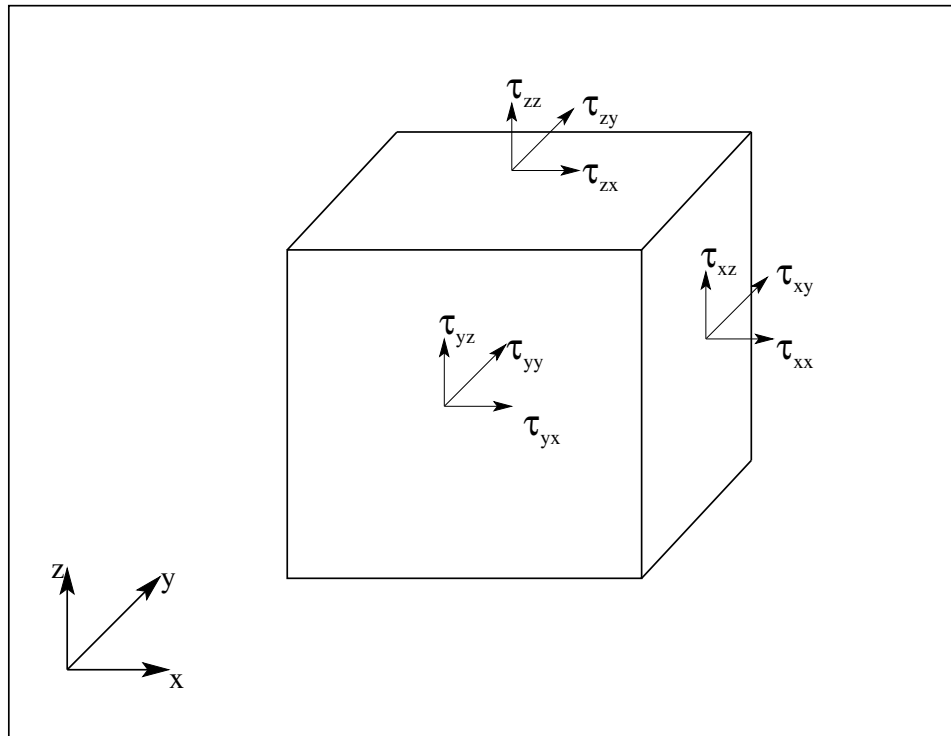


Figura 4.2: *Tensores de Reynolds nas faces do elemento de volume  $dv$ .*

No elemento  $dv$  os 9 tensores estão distribuídos de modo que aparecem 3 deles em cada face. Os tensores que correspondem ao cisalhamento na direção  $x$  das componentes  $u, v$  e  $w$ , aparecem nas faces dispostas perpendicularmente ao eixo  $x$ , ou seja, as faces de arestas  $dy.dz$

Portanto, por um processo análogo, podemos calcular as componentes  $y$  e  $z$  da força de atrito:

$$F_Y = \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) . dy . dx . dz \quad (4.30)$$

$$F_Z = \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) . dx . dy . dz \quad (4.31)$$

E agora, lembrando a definição dos tensores  $\tau$  (e considerando que o coeficiente  $\mu$  é constante e igual para as 3 direções), chegamos a conclusão que:

$$F_X = \mu \nabla^2 u . dv \quad (4.32)$$

$$F_Y = \mu \nabla^2 v . dv \quad (4.33)$$

$$F_Z = \mu \nabla^2 w . dv \quad (4.34)$$

pois  $dv = dx . dy . dz$ . A força de atrito ( $F_{at}$ ) é então a soma das componentes  $X, Y$  e  $Z$ :

$$F_{at} = \mu \nabla^2 \vec{V} . dv \quad (4.35)$$

## 4.4 Forças Centrífuga e de Coriolis

Ao fazermos a descrição do movimento que ocorre nos oceanos estamos fazendo a descrição de um movimento que ocorre sobre uma superfície em rotação, pois a Terra está em rotação. Portanto devemos levar em consideração o efeito da rotação da Terra para podermos fazer uma descrição absoluta do movimento, isto é, para podermos descrever o movimento da maneira como ele seria descrito por um observador que estivesse em um referencial inercial<sup>8</sup>. Trata-se portanto de um tipo de movimento relativo: para o observador que está na superfície da Terra (nós) a descrição do movimento é uma, para um observador em um referencial inercial é outra, pois um referencial possui movimento relativo de rotação uniforme<sup>9</sup> em relação ao outro.

Vamos analisar primeiro como seria a descrição do movimento de uma partícula de acordo com dois referenciais que estão em movimento relativo de translação uniforme, ou seja, um referencial ( $OXYZ$ ) é fixo e o outro ( $O'X'Y'Z'$ ) está em movimento em relação ao primeiro com velocidade constante ( $\vec{v}$ , sem apresentar movimento de rotação).

### 4.4.1 Movimento Relativo de Translação Uniforme

Consideramos que os eixos  $x$  de ambos os referenciais estão sobre a mesma reta, conforme a figura 4.3, e que ( $O'X'Y'Z'$ ) está se afastando de ( $OXYZ$ ). Ambos os observadores  $O$  e  $O'$  observam uma partícula A, também em movimento.

O vetor posição de A relativo ao referencial  $OXYZ$  é:

$$\vec{r} = x . \vec{i} + y . \vec{j} + z . \vec{k} \quad (4.36)$$

e ao referencial  $O'X'Y'Z'$  é:

$$\vec{r}' = x' . \vec{i}' + y' . \vec{j}' + z' . \vec{k}' \quad (4.37)$$

---

<sup>8</sup>Referencial inercial é todo referencial que não possui aceleração, um referencial fixo na superfície da Terra não é inercial pois possui uma aceleração centrípeta.

<sup>9</sup>O movimento de rotação é uniforme pois a velocidade angular de rotação da Terra ( $\Omega$ ) é constante.

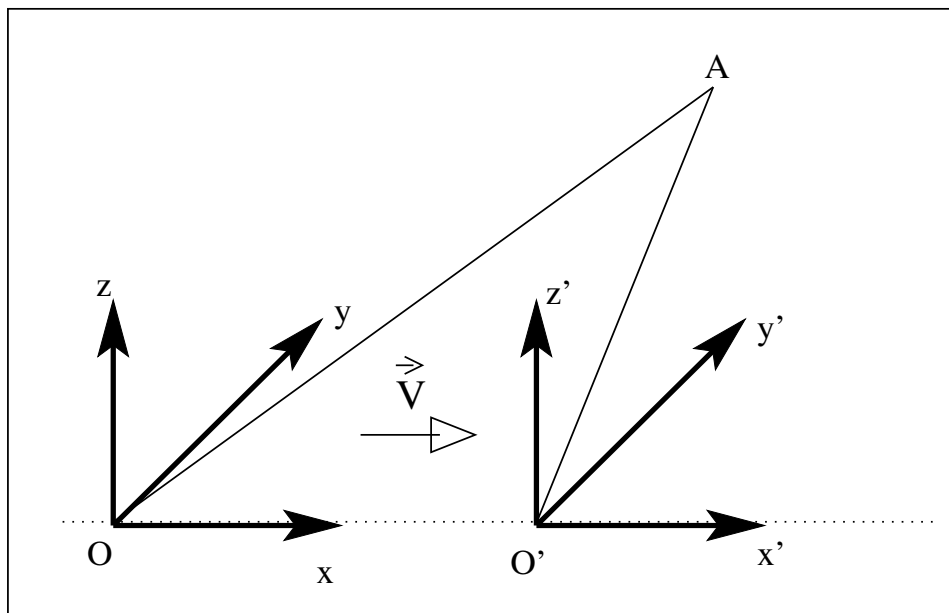


Figura 4.3: Movimento relativo de translação uniforme entre um referencial fixo e outro móvel.

No triângulo AOO' a reta OO' equivale a distância  $\vec{v}.t$ , onde  $\vec{v}$  é velocidade de deslocamento do referencial móvel e  $t$  é o tempo. Portanto  $\vec{r}'$  é a diferença vetorial entre  $\vec{r}$  e  $\vec{v}.t$ :

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}.t \quad (4.38)$$

Ao derivarmos a equação 4.38 encontramos a equação que relaciona as velocidades de A medidas pelos dois observadores, no referenciais fixo e móvel:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{v}.t}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v} \frac{dt}{dt} \quad (4.39)$$

ou seja:

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{v} \quad (4.40)$$

onde:

$\vec{V}'$  é a velocidade de A relativa ao referencial  $O'X'Y'Z'$

$\vec{V}$  é a velocidade de A relativa ao referencial  $OXYZ$

$\vec{v}$  é a velocidade de  $O'X'Y'Z'$  relativa a  $OXYZ$ .

Derivando a equação 4.40 achamos a aceleração de A e notamos que esta é igual para os dois referenciais, pois estes não possuem aceleração relativa dado que  $\vec{v}$  é constante.

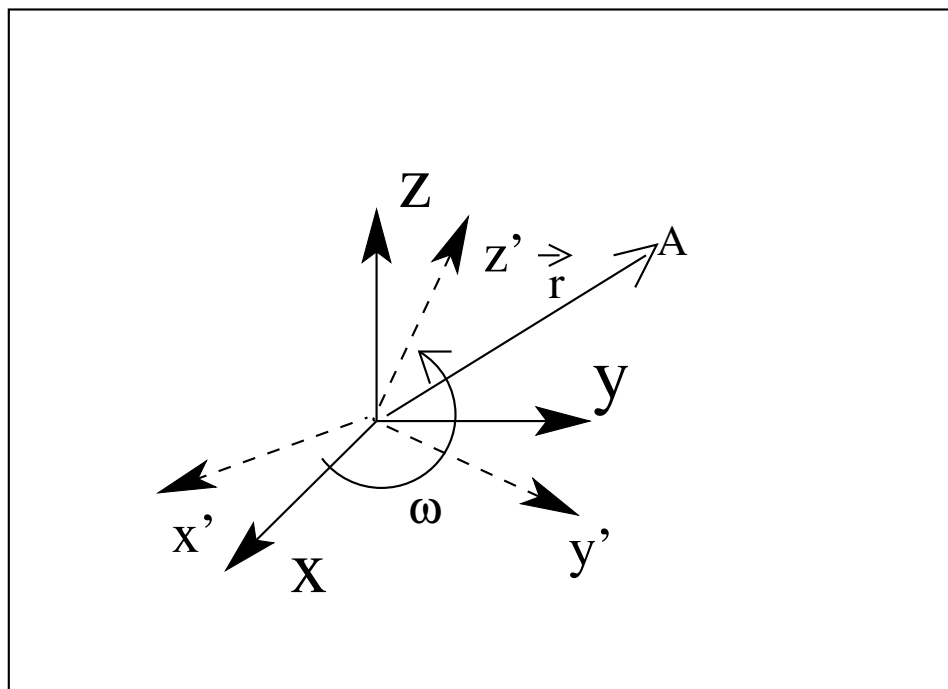


Figura 4.4: Movimento relativo de rotação uniforme entre um referencial fixo em outro móvel, com as origens coincidentes.

$$\frac{d\vec{V}'}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} - \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (4.41)$$

Pois  $v$  é constante.

Ou seja:

$$\vec{a}' = \vec{a} \quad (4.42)$$

pois  $\vec{v}$  é constante.

Portanto, quando um movimento é descrito por dois referenciais que não apresentam aceleração relativa, a aceleração medida por um referencial é igual aquela medida pelo outro. No entanto, caso o referencial móvel apresente um movimento de rotação em relação ao referencial fixo temos que levar em consideração o efeito da aceleração centrípeta devido a rotação do referencial. Como, por exemplo, no caso de movimento relativo de rotação uniforme em relação aos referenciais da figura 4.4, que é descrito a seguir.

#### 4.4.2 Movimento Relativo de Rotação Uniforme

Neste caso o referencial  $O'X'Y'Z'$  apresenta uma velocidade angular constante ( $\Omega$ ) em relação ao referencial  $OXYZ$ , que é fixo. O vetor posição da partícula A relativo ao referencial



$OXYZ$  é:

$$\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \quad (4.43)$$

e ao referencial  $O'X'Y'Z'$  é:

$$\vec{r} = x'.\vec{i}' + y'.\vec{j}' + z'.\vec{k}' \quad (4.44)$$

Ambos são representados por  $r$  pois são espacialmente iguais, dado que a origem dos dois referenciais coincide e por definição o vetor posição é um vetor que vai da origem até a posição da partícula

A velocidade de A relativa ao referencial  $OXYZ$  para o observador  $O$  é a derivada de  $r$  em relação ao tempo:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}.\vec{i} + \frac{dy}{dt}.\vec{j} + \frac{dz}{dt}.\vec{k} \quad (4.45)$$

e a velocidade de A relativa ao referencial  $O'X'Y'Z'$  para o observador  $O'$

$$\vec{V}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}.\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}.\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}.\vec{k}' \quad (4.46)$$

Porém, para descrição da velocidade de A relativa ao referencial  $O'X'Y'Z'$  feita pelo observador  $O$  os versores  $i', j', k'$  não são constantes, pois para o observador  $O$  estes versores descrevem um movimento circular uniforme. Portanto temos que fazer:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx'}{dt}.\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}.\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}.\vec{k}' = \frac{dx'}{dt}.\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}.\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}.\vec{k}' + x' \cdot \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \cdot \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \cdot \frac{d\vec{k}'}{dt} \quad (4.47)$$

Porém, como os versores descrevem movimento circular uniforme, podemos dizer que os tres últimos termos da equação 4.47 são componentes do produto vetorial  $\Omega \times \vec{r}$ , pois as derivadas dos versores correspondem a  $\Omega$ . Portanto, ficamos com:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \Omega \times \vec{r} \quad (4.48)$$

Para calcular a aceleração derivamos a equação 4.48 em relação ao tempo:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}'}{dt} + \frac{d\Omega \times \vec{r}}{dt} \quad (4.49)$$

Analogamente à derivada de  $\vec{r}$ , na derivada de  $\vec{V}'$  os versores  $i', j', k'$  não são constantes, portanto ficamos com:

$$\frac{d\vec{V}'}{dt} = \frac{du'}{dt} \cdot \vec{i}' + \frac{dv'}{dt} \cdot \vec{j}' + \frac{dw'}{dt} \cdot \vec{k}' + u' \cdot \frac{d\vec{i}'}{dt} + v' \cdot \frac{d\vec{j}'}{dt} + w' \cdot \frac{d\vec{k}'}{dt} \quad (4.50)$$

$$\frac{d\vec{V}'}{dt} = \vec{a}' + \Omega \times \vec{V}' \quad (4.51)$$

Portanto:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}' + \Omega \times \vec{V}' + \Omega \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.52)$$

e utilizando a equação 4.48 para definição de  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  ficamos com :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}' + \Omega \times \vec{V}' + \Omega \times (\vec{V}' + \Omega \times \vec{r}) \quad (4.53)$$

ou seja:

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2 \cdot \Omega \times \vec{V}' + \Omega \times \Omega \times \vec{r} \quad (4.54)$$

A última equação nos diz que as acelerações de A medidas de acordo com os referenciais em movimento de rotação relativo não são iguais mas podem ser comparadas desde que levemos em consideração o efeito da rotação do referencial móvel. Este efeito expressa-se matematicamente através de dois termos, conhecidos como “aceleração de Coriolis” ( $2 \cdot \Omega \times \vec{V}'$ ) e “aceleração centrípeta” ( $\Omega \times \Omega \times \vec{r}$ ). No caso de estarmos medindo a aceleração de um movimento que ocorre na superfície da Terra estamos medindo  $a'$  portanto para podermos saber a aceleração absoluta ( $a$ ) temos que somar os termos de Coriolis e centrípeta. A Força de Coriolis é calculada ao multiplicarmos o termo  $2\Omega \times \vec{V}'$  pela massa do corpo ou partícula que está em movimento. Esta força atua no sentido de defletir todos os movimentos que ocorrem na superfície da Terra, porém seu efeito só é sentido em movimentos de larga e média escalas. A deflexão do movimento causada pela força de Coriolis ocorre para esquerda no hemisfério sul e para direita no hemisfério norte. É fácil entender isto se olharmos os movimentos que ocorrem na superfície da Terra de cima, ou seja a partir de um referencial inercial. Um movimento que esteja ocorrendo no hemisfério norte, ao ser olhado de cima (olhando a Terra de um referencial localizado sobre o polo norte), ocorre sobre uma superfície que gira para esquerda, portanto é defletido para direita. Ao contrário, um movimento que ocorre no hemisfério sul ao ser olhado de cima (um referencial localizado sobre o polo sul) está ocorrendo sobre uma superfície que gira para direita, portanto é defletido para esquerda. Para que pudéssemos ter o mesmo efeito no hemisfério sul, que aquele observado no hemisfério norte, teríamos que observar o movimento a partir de um referencial localizado dentro da Terra, ou então, que os dois hemisférios da Terra girassem cada uma para um lado.

O efeito da Força centrípeta ( $\Omega \times \Omega \times \vec{r}$  multiplicado pela massa) será levado em consideração junto com a aceleração da gravidade. Considerando um corpo que esteja parado na superfície

da Terra, este corpo estará sujeito apenas a aceleração da gravidade e a centrípeta, portanto a partir da equação 4.54 podemos dizer que:

$$a = g' + \Omega \times \Omega \times \vec{r} \quad (4.55)$$

Na equação 4.55  $g'$  é a aceleração da gravidade medida aqui, na superfície da Terra. Chamaremos  $a$  de  $g$ , ou seja, a aceleração da gravidade medida em relação a um referencial inercial, e assim podemos dizer que:

$$g' = g - \Omega \times \Omega \times \vec{r} \quad (4.56)$$

O termo  $\Omega \times \Omega \times \vec{r}$ , agora com sinal negativo, refere-se a aceleração centrífuga, que aponta em direção contrária ao centro da Terra. Desta forma,  $g'$  é a gravidade somada ao efeito da centrífuga. Esta nova gravidade não aponta exatamente na direção do centro da Terra, mas um pouco defletida desta em movimento<sup>10</sup>. A direção de  $g'$  será usada como a direção vertical, ao longo da qual aponta o eixo  $z$  do nosso sistemas de coordenadas cartesianas fixo na superfície da Terra.

---

<sup>10</sup>A deflecção de  $g'$  é pequena pois o vetor  $-\Omega \times \Omega \times \vec{r}$  é bem menor que  $g$ .

## Capítulo 5

# Leis de Conservação das Propriedades da Água do Mar

O estudo do movimento nos oceanos, causado pelas forças descritas no capítulo passado, será feito com base em algumas equações que descreveremos agora. Para descrever as variações de velocidade no mar precisamos de um sistema de equações determinado e possível, isto é, que tenha o mesmo número de equações e incógnitas. As nossas incógnitas são as propriedades da água do mar, mais especificamente *massa, momento, pressão, temperatura (calor) e salinidade*. Portanto, precisamos de equações que descrevam as variações (ou conservação<sup>1</sup>) destas propriedades. Estas equações são as equações da conservação de massa, momento, sal e calor, e a equação do estado da água do mar. Trabalhamos sempre com a conservação destas propriedades dentro de um elemento de volume conhecido, assim utilizaremos densidade ao invés de massa, já que o volume é conhecido. Formamos então um sistemas com 7 equações (dado que a equação da conservação do momento tem 3 componentes, pois momento é uma variável vetorial) e 7 incógnitas:

1. densidade ( $\rho$ )
2. as 3 componentes da velocidade ( $u, v$  e  $w$ )
3. pressão ( $p$ )
4. temperatura ( $T$ )
5. salinidade ( $S$ )

Este sistema de equações não é muito fácil de ser resolvido, por isto fazemos algumas aproximações para simplificá-lo. Vamos considerar inicialmente um oceano homogêneo e assim ficamos com apenas quatro incógnitas: a pressão e as 3 componentes da velocidade, e quatro equações: a equação da conservação da massa e as 3 componentes da equação da conservação

---

<sup>1</sup>Dizemos as vezes “Leis de Conservação” e outras “Equações que Expressam a Variação” das propriedades por que estes fenômenos estão relacionados: se uma propriedade não se conserva então ela deve apresentar uma variação.

do momento. Neste caso não precisamos da equação do estado da água do mar e das equações de conservação de sal e calor, dado que a densidade é homogênea, e conseqüentemente a temperatura e a salinidade devem também se aproximar de uma distribuição homogênea, pois  $\rho$  é uma função de  $S$  e  $T$ . Esta é uma situação hipotética em que a distribuição de densidade no oceano não varia espacialmente, estamos portanto eliminando os gradientes de densidade e conseqüentemente a circulação termohalina. Nada mais natural que comecemos a estudar primeiro as situações mais simples para depois partimos para as mais complicadas. Depois de estudar os movimentos que independem de gradientes de densidade então partiremos para estudar os movimentos causados por estes gradientes. E assim buscamos isoladamente cada solução.

Algumas vezes trabalhamos com a equação da conservação da energia, e nestes casos formamos um sistema com as equações de conservação de *massa, energia e momento*. Trabalhamos sempre no sistema euleriano de descrição da variação de propriedades, portanto, lembrando as definições dadas no apêndice A, as derivadas utilizadas serão compostas de uma variação local e uma advectiva, e a conservação a ser estudada será descrita para um elemento de volume infinitesimal.

## 5.1 Equação da Conservação da Massa

Esta equação surge a partir de uma lei que expressa a conservação de massa para um volume fechado, quando não existem fontes ou sumidouros de massa dentro dos limites deste volume e a massa pode ser descrita como uma propriedade conservativa.

*“A variação interna de massa de um elemento de volume “ $dv$ ” deve ser equivalente ao fluxo residual de massa nas faces no elemento”.*

Em outras palavras: massa não pode ser criada ou destruída dentro de  $dv$ , portanto, somadas as entradas e saídas de massa pelas faces de  $dv$  a quantidade interna de massa deve se conservar. Matematicamente este enunciado se escreve :

$$\frac{\partial \rho \cdot dv}{\partial t} = -\nabla(\vec{V} \cdot \rho) \cdot dv \quad (5.1)$$

onde:

$\rho \cdot dv$  é a quantidade de massa, pois massa = densidade  $\times$  volume,

$\vec{V} \cdot \rho$  é fluxo de massa, pois velocidade  $\times$  densidade tem unidade de fluxo ( $kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$ ).

### 5.1.1 Fluxo de Massa

Tomamos inicialmente a direção  $x$  como exemplo para deduzir a expressão matemática para o fluxo de massa nas faces de  $dv$ . O fluxo de massa residual na direção  $x$  ( $F_X^R$ ) do elemento

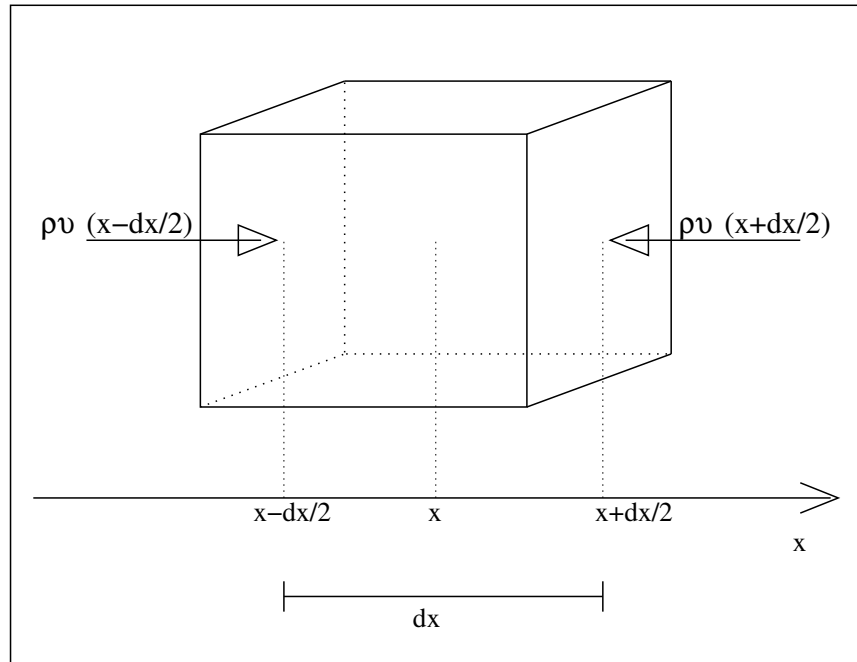


Figura 5.1: Fluxo de massa nas faces do elemento  $dv$ .

$dv$ , isto é, o que saiu menos o que entrou, é calculado pela diferença entre o fluxo nas faces “ $x + dx/2$ ” e “ $x - dx/2$ ”, conforme a figura 5.1.

$$F_X^R = F(x + dx/2) - F(x - dx/2)$$

onde:

$$F(x \pm dx/2) = \rho \cdot u(x \pm dx/2)$$

$u$  é a componente de  $\vec{V}$  na direção  $x$ .

$\rho \cdot u$  nas faces “ $x + dx/2$ ” e “ $x - dx/2$ ” é calculado a partir de  $\rho \cdot u$  no ponto central de  $dv$ , usando-se novamente a série de Taylor.

$$\rho \cdot u(x + dx/2) = \rho \cdot u(x) + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} \cdot dx/2 + TO2 \quad (5.2)$$

e,

$$\rho \cdot u(x - dx/2) = \rho \cdot u(x) - \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} \cdot dx/2 + TO2 \quad (5.3)$$

TO2 representa os termos de ordem 2 ou maior, os quais são desprezados.

Portanto o fluxo residual será:

$$F_X^R = \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} \cdot dx \quad (5.4)$$

A equação 5.4 expressa o fluxo residual de massa no ponto central das faces de  $dv$  normais ao eixo  $x$ . Para calcularmos o fluxo pela face toda multiplicamos 5.4 pela área da face ( $dy.dz$ ).

$$F_X^R = \left( \frac{\partial(\rho.u)}{\partial x} . dx \right) . dy . dz \quad (5.5)$$

Analogamente, para as direções  $y$  e  $z$  teremos:

$$F_Y^R = \left( \frac{\partial(\rho.v)}{\partial y} . dy \right) . dx . dz \quad (5.6)$$

$$F_Z^R = \left( \frac{\partial(\rho.w)}{\partial z} . dz \right) . dx . dy \quad (5.7)$$

onde  $v$  e  $w$  são as componentes de  $\vec{V}$  nas direções  $y$  e  $z$ .

Portanto, o fluxo residual total nas faces de  $dv$  ( $F_T^R$ ), será:

$$F_T^R = \left( \frac{\partial(\rho.u)}{\partial x} . dx \right) . dy . dz + \left( \frac{\partial(\rho.v)}{\partial y} . dy \right) . dx . dz + \left( \frac{\partial(\rho.w)}{\partial z} . dz \right) . dx . dy \quad (5.8)$$

ou seja,

$$F_T^R = \nabla(\rho.\vec{V}) . dv \quad (5.9)$$

pois  $dv = dx . dy . dz$ .

### 5.1.2 Variação Interna

A variação interna de massa é o que nós conhecemos por variação local, representada pela derivada parcial da massa relativa ao tempo:

$$\frac{\partial(\rho.dv)}{\partial t} \quad (5.10)$$

portanto a nossa lei de conservação de massa será construída igualando-se as equações 5.10 e 5.9:

$$\frac{\partial(\rho.dv)}{\partial t} = -\nabla(\rho.\vec{V}) . dv \quad (5.11)$$

O sinal negativo no segundo membro da equação 5.11 indica que a massa deve diminuir dentro de  $dv$  quando o fluxo nas faces for positivo, isto é, estiver saindo mais do que entrando.

Como  $dv$  é constante podemos cancelá-lo na equação 5.11 e ficamos com:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla(\rho \cdot \vec{V}) \quad (5.12)$$

Esta equação pode ser retrabalhada da seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla \rho - \rho \cdot \nabla \vec{V} \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho = -\rho \cdot \nabla \vec{V} \quad (5.14)$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \vec{V} \quad (5.15)$$

A equação 5.15 é a **equação da conservação da massa** na forma como a usaremos para modelar o movimento.

## 5.2 Equação da Conservação do Momento

Por definição o momento de uma partícula é uma grandeza vetorial calculada pelo produto da massa da mesma pela sua velocidade. Podemos escrever a segunda Lei de Newton em termos de momento se colocarmos a aceleração como taxa de variação da velocidade e considerarmos a massa constante:

$$\vec{F}_R = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (5.16)$$

Na equação 5.16  $\vec{p} = m \cdot \vec{V}$  é o momento e  $\vec{F}_R$  é a resultante das forças que agem sobre a partícula.

As leis do movimento de Newton, quando colocadas em termos de momento, nos dizem:

*“O momento de uma partícula se conserva a menos que sobre esta esteja atuando uma força resultante não nula, e neste caso a força deve se equivaler a taxa de variação do momento em relação ao tempo”.*

portanto esta será a nossa equação da conservação do momento. Lembrando que as forças que atuam sobre uma partícula de água no oceano são: a força do Gradiente de Pressão, a força de Atrito e a força Peso (desprezadas as forças Geradoras de Maré) ficaremos com:



$$\vec{F}_R = -\nabla p \cdot dv + \mu \cdot \nabla^2 \vec{V} + m \cdot \vec{g} \quad (5.17)$$

ou seja,

$$m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla p \cdot dv + \mu \cdot \nabla^2 \vec{V} \cdot dv + m \cdot \vec{g} \quad (5.18)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla p \cdot \frac{dv}{m} + \mu \cdot \nabla^2 \vec{V} \cdot \frac{dv}{m} + \vec{g} \quad (5.19)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \nu \cdot \nabla^2 \vec{V} + \vec{g} \quad (5.20)$$

dado que  $\frac{dv}{m}$  é o inverso da densidade,  $1/\rho$ .

Na equação 5.20,  $\nu$  é o coeficiente cinemático de viscosidade, equivalente ao coeficiente dinâmico  $\mu$  dividido por  $\rho$ . Essa equação é conhecida como a equação de *Navier-Stokes* para o movimento.

A equação de *Navier-Stokes* expressa a conservação de momento para um movimento de pequena escala, que ocorre em um fluido incompressível e irrotacional. No entanto, como pretendemos descrever movimentos de grande escala, os quais são influenciados pelo efeito de rotação da Terra, devemos levar em consideração o efeito causado pela rotação, ou seja devemos adicionar a equação 5.20 os termos de Coriolis e Centrífuga:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + 2 \cdot \vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \nu \cdot \nabla^2 \vec{V} + \vec{g} \quad (5.21)$$

Trabalharemos com a gravidade  $\vec{g}'$ , a qual é a resultante entre o vetor de aceleração gravitacional terrestre e o vetor aceleração centrífuga (conforme apresentado na formula 4.56) e assim o termo  $\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}$  estará incluso na gravidade. Portanto a forma final da equação da conservação do momento é:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + 2 \cdot \vec{\Omega} \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \nu \cdot \nabla^2 \vec{V} + \vec{g}' \quad (5.22)$$

Como momento e velocidade são grandezas vetoriais e estamos trabalhando no espaço tridimensional, cada termo da equação 5.22 tem 3 componentes:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dv}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dw}{dt} \cdot \vec{k} \quad (5.23)$$

$$2.\vec{\Omega} \times \vec{V} = (2.\vec{\Omega}\cos\theta w - 2.\vec{\Omega}\sin\theta v).\vec{i} + (2.\vec{\Omega}\sin\theta u).\vec{j} - (2.\vec{\Omega}\cos\theta u).\vec{k} \quad (5.24)$$

$$\frac{1}{\rho}.\nabla p = \frac{1}{\rho}.\left(\frac{\partial p}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}.\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}.\vec{k}\right) \quad (5.25)$$

$$\vec{g}' = 0.\vec{i} + 0.\vec{j} - g'.\vec{k} \quad (5.26)$$

$$\nu.\nabla^2\vec{V} = \nu.(\nabla^2 u.\vec{i} + \nabla^2 v.\vec{j} + \nabla^2 w.\vec{k}) \quad (5.27)$$

Portanto a equação 5.22 tem 3 componentes:

Componente  $x$ :

$$\frac{du}{dt} + 2.\vec{\Omega}\cos\theta.w - 2.\vec{\Omega}\sin\theta v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu.\nabla^2 u \quad (5.28)$$

Componente  $y$ :

$$\frac{dv}{dt} + 2.\vec{\Omega}\sin\theta u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu.\nabla^2 v \quad (5.29)$$

Componente  $z$ :

$$\frac{dw}{dt} - 2.\vec{\Omega}\cos\theta.u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu.\nabla^2 w \quad (5.30)$$

## 5.3 Equações de Conservação Complementares

### 5.3.1 Conservação de Sal

O procedimento utilizado para explicar a conservação de sal é o mesmo utilizado na conservação de massa, porém agora devemos levar em consideração também o fluxo de sal nas faces do elemento  $dv$  devido a processos difusivos, pois em se tratando de salinidade estes processos são relevantes.

A quantidade de sal por unidade de volume de água do mar é expressa pelo produto entre densidade da água e salinidade:

$$\rho.S \quad (5.31)$$

Pois, lembrando que  $\rho$  tem unidade de  $Kg_{\text{água}}/m^3_{\text{água}}$  e  $S$  tem unidade de  $Kg_{\text{sal}}/Kg_{\text{água}}$ , a unidade do produto acima será  $Kg_{\text{sal}}/m^3_{\text{água}}$ . Assim, o fluxo de sal por advecção pela corrente é:

$$FS_{ad} = \rho.S.\vec{V} \quad (Kg_{\text{sal}}/m^2.s) \quad (5.32)$$

onde:

$\rho$  é a densidade da água;

$S$  é a salinidade;

$\vec{V}$  é a velocidade da água.

As componentes de  $FS_{ad}$  são:  $u.\rho.S$ ,  $v.\rho.S$  e  $w.\rho.S$ .

Seguindo o mesmo procedimento utilizado para massa verificamos que o fluxo residual de sal entre as duas faces de  $dv$  dispostas perpendicularmente aos eixos coordenados  $x$ ,  $y$  e  $w$  são, respectivamente:

$$FS_{adx} = \frac{\partial u.\rho.S}{\partial x}.\delta x.\delta y.\delta z \quad (5.33)$$

$$FS_{ady} = \frac{\partial v.\rho.S}{\partial y}.\delta y.\delta x.\delta z \quad (5.34)$$

$$FS_{adz} = \frac{\partial w.\rho.S}{\partial z}.\delta z.\delta x.\delta y \quad (5.35)$$

As quais, quando somadas, resultam em:

$$\nabla\vec{V}.\rho.S.dv \quad (5.36)$$

Para que haja conservação de sal a variação local da quantidade de sal deve ser igual ao fluxo de sal nas faces de  $dv$ , com sinal inverso, pois se o fluxo for positivo teremos uma saída de sal maior que a entrada, ou seja, uma variação local negativa:

$$\frac{\partial \rho.S.dv}{\partial t} = -\nabla\vec{V}.\rho.S.dv \quad (5.37)$$

Sendo a Salinidade medida em  $kg$  de sal por  $kg$  de água o argumento da derivada local terá unidade:  $\frac{kg(\text{água})}{m^3(\text{água})} \cdot \frac{kg(\text{sal})}{kg(\text{água})} \cdot m^3(\text{água})$  ou seja  $kg(\text{sal})$ .

Porém como  $dv$  é constante podemos eliminá-lo da equação 5.37:

$$\frac{\partial \rho.S}{\partial t} = -\nabla\vec{V}.\rho.S \quad (5.38)$$

No entanto, como já foi dito, o fluxo de sal por difusão não pode ser desprezado. Sempre que houver uma diferença de concentração entre os dois lados de uma face, ou seja, um gradiente, vai haver difusão molecular de sal da área de maior concentração para a de menor.

Esta difusão ocorre por processos moleculares, por isto é chamada de difusão molecular<sup>2</sup>. Matematicamente a difusão molecular se expressa por:

$$-k_{ds}\nabla\rho S \quad (5.39)$$

$k_{ds}$  é um coeficiente de difusão salina. O sinal negativo indica que a difusão ocorre em sentido contrário ao aumento do gradiente. Ao levarmos em consideração o processo da difusão na equação 5.38 ficaremos com:

$$\frac{\partial\rho.S}{\partial t} = -\nabla(\vec{V}.\rho.S - k_{ds}\nabla\rho S) \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial\rho.S}{\partial t} = -\nabla\vec{V}.\rho.S - \nabla(-k_{ds}\nabla\rho S) \quad (5.41)$$

e caso  $k_{ds}$  seja constante, podemos escrever a equação 5.41 da seguinte forma:

$$\frac{\partial\rho S}{\partial t} + \nabla\rho S\vec{V} = k_{ds}\nabla^2\rho S \quad (5.42)$$

A equação 5.42 é a **equação para conservação de sal** em um elemento de volume  $dv$  constante.

### 5.3.2 Conservação de Calor

Neste caso a quantidade de calor é expressa em função da temperatura da água do mar da seguinte forma:

$$\rho c_p T \quad (5.43)$$

onde:

$c_p$  é o calor específico da água do mar à pressão constante (suposto constante).

$T$  é a temperatura da água do mar.

Lembrando que  $c_p$  tem unidade de quantidade de calor ( $Q$ ) por quantidade de água por unidade de temperatura ( $^{\circ}C$ ), a unidade de  $\rho.c_p.T$  é  $Q/m_{\text{agua}}^3$ . Portanto, a variação local da quantidade de calor deve ser igual ao fluxo de calor nas faces do elemento (com sinal inverso):

---

<sup>2</sup>No caso da corrente que advecta o sal através das faces ser turbulenta, teremos além da difusão molecular a difusão turbulenta, que ocorre devido aos movimentos turbulentos, sobrepostos a corrente média.

$$\frac{\partial \rho c_p T}{\partial t} = -\nabla(\vec{V} \rho c_p T) \quad (5.44)$$

Também no caso do calor existe difusão devido a processos moleculares, por causa de gradientes de temperatura na água. Portanto, a equação completa para conservação do calor é escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho c_p T}{\partial t} = -\nabla(\vec{V} \rho c_p T) - \nabla(-k_{dc} \nabla \rho c_p T) \quad (5.45)$$

Na equação 5.45  $-k_{dc} \nabla T$  é a difusão de calor associada aos gradientes de temperatura e  $k_{dc}$  é um coeficiente de difusão de calor ou coeficiente de condutividade térmica.

Sendo  $k_{dc}$  um coeficiente constante podemos reescrever a equação 5.45 da seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho c_p T}{\partial t} + \nabla(\vec{V} \rho c_p T) = k_{dc} \nabla^2 \rho c_p T \quad (5.46)$$

A equação 5.46 é a **equação para conservação de calor** em um elemento de volume  $dv$  constante, ou **equação da condução do calor**. Esta equação é uma forma da 1ª **Lei da Termodinâmica** e também é conhecida como “*equação para conservação da energia interna*”. Esta equação pode ter diferentes formas, dependendo de qual variável é utilizada para expressar a energia interna do fluido. O calor interno no elemento de volume pode ser expresso em termos da **entropia específica** ( $\eta$ ), da **temperatura potencial** ( $\theta$ ) ou da **temperatura** ( $T$ ).

Caso  $\rho$  e  $c_p$  sejam constantes, podemos reescrever a equação 5.46 da seguinte forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \vec{V} T = k_{dc}^* \nabla^2 T \quad (5.47)$$

onde:  $k_{dc}^*$  é o coeficiente cinemático de condução de calor.

## 5.4 Conservação da Energia Cinética

Em alguns casos pode ser melhor trabalharmos com a equação da conservação da energia do que com as equações da conservação de sal e calor, mas nem sempre isto é possível. Lembrando que a energia cinética é formulada em função da massa e da velocidade da seguinte forma:  $\frac{m\vec{V}^2}{2}$ , onde  $m$  é a massa e  $\vec{V}$  é a velocidade, vamos obter uma equação para energia por unidade de massa, ou seja,  $\frac{\vec{V}^2}{2}$

Multiplicando a equação 5.22, através de um produto escalar, por  $\vec{V}$  obtemos:

$$\vec{V} \bullet \left( \frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \nu \cdot \nabla^2 \vec{V} + \vec{g} \right) \quad (5.48)$$

ou seja:

$$\vec{V} \bullet \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{V} \bullet 2\vec{\Omega} \times \vec{V} = -\vec{V} \bullet \frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \vec{V} \bullet \nu \cdot \nabla^2 \vec{V} + \vec{V} \bullet \vec{g} \quad (5.49)$$

Na equação 5.49 verificamos que:

O produto escalar entre  $\vec{V}$  e a derivada de  $\vec{V}$  resulta em:  $\frac{d(\vec{V}^2/2)}{dt}$ . Pois  $\frac{d(\vec{V}^2/2)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\vec{V} \bullet \vec{V})}{dt} = \frac{1}{2} 2\vec{V} \bullet \frac{d\vec{V}}{dt}$  ou seja,  $\frac{d(\vec{V}^2/2)}{dt} = \vec{V} \bullet \frac{d\vec{V}}{dt}$ .

O produto escalar entre  $\vec{V}$  e o termo de Coriolis é nulo pois a força de Coriolis é perpendicular a  $\vec{V}$ .

O produto escalar entre  $\vec{V}$  e o gradiente de pressão é reescrito da seguinte forma:  
 $\frac{1}{\rho} \nabla(\vec{V} p) - \frac{1}{\rho} p \nabla \vec{V}$ .

O produto escalar entre  $\vec{V}$  e o termo de gravidade resulta em:  $-w \cdot g \cdot \vec{k}$ , pois  $\vec{g}$  só tem uma componente, a componente vertical.

E, finalmente, o produto escalar entre  $\vec{V}$  e o termo de atrito resulta em:  $\nu \cdot \nabla^2(\vec{V}^2/2) - 2\nabla \vec{V}$ , pois  $\nabla^2(\vec{V}^2/2) = \frac{1}{2} \nabla^2(\vec{V} \bullet \vec{V}) = \frac{1}{2} \nabla(\vec{V} \bullet \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{V} \bullet \frac{d\vec{V}}{dt}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \nabla(\vec{V} \bullet \frac{d\vec{V}}{dt}) = \vec{V} \bullet \nabla^2 \vec{V} + \nabla \vec{V} \bullet \nabla \vec{V}$ . Portanto  $\vec{V} \bullet \nabla^2 \vec{V} = \nabla^2(\vec{V}^2/2) - 2\nabla \vec{V}$ .

Portanto, ficamos com:

$$\frac{d(\vec{V}^2/2)}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla(\vec{V} p) + \frac{1}{\rho} p \nabla \vec{V} - w \cdot g \cdot \vec{k} + \nu \cdot \nabla^2(\vec{V}^2/2) - 2\nu \nabla \vec{V} \quad (5.50)$$

A equação 5.50 expressa a **conservação de energia cinética** para um elemento de volume de massa unitária.

## 5.5 Aproximações

As equações para conservação de sal e calor (equações 5.42 e 5.47) são utilizadas, em conjunto com a equação do estado da água do mar, para estudar o oceano caso este não possa ser considerado homogêneo. Muitas vezes fazemos uso desta aproximação (homogeneidade) e neste caso a densidade  $\rho$  é considerada como constante, ou seja, não varia espacialmente. Outra aproximação que utilizamos é considerar o oceano incompressível, ou seja, as variações de densidade causadas por compressão pelo fluxo são desprezadas. Neste caso, na equação

para conservação da massa (equação 5.15) a variação de  $\rho$  é nula:  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ . Assim a equação para conservação da massa pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\nabla \bullet \vec{V} = 0 \quad (5.51)$$

A equação 5.51 (equação da conservação da massa para fluxos incompressíveis) é conhecida como **equação da continuidade**. Esta equação nos diz que os fluxos nas faces de  $dv$  nas 3 direções devem se compensar, de modo que não haja variação total da densidade, ou seja, o que entra no elemento  $dv$  deve ser igual ao que sai.

*“A incompressibilidade do oceano não implica em homogeneidade, e vice-versa. Quando consideramos o oceano homogêneo estamos dizendo que não existe variação espacial da densidade, mas não fazemos nenhuma referência a variação local de  $\rho$ . E quando consideramos o oceano incompressível, estamos dizendo que a variação total de  $\rho$  é nula, ou seja, que a variação local e a advectiva de  $\rho$  são nulas, ou que elas se anulam mutuamente.”*

Para exemplificar, considere a situação hipotética de um oceano homogêneo (não existem gradientes espaciais de densidade), isto é,  $\nabla\rho = 0$ . Neste caso na derivada total de  $\rho$  a parte advectiva se anula:  $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{V} \bullet \nabla\rho$ . Assim ficamos apenas com a variação local, ou seja, uma situação em que não existem gradientes de densidade mas continuam existindo variações de densidade, mas apenas localmente. Por outro lado poderíamos ter uma situação em que a variação local e a advectiva fossem nula mas o gradiente de  $\rho$  não. Imaginem o caso em que a densidade varia apenas na direção  $z$ , sendo constante ao longo de  $x$  e  $y$ :

$$\nabla\rho = 0.\vec{i} + 0.\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial z}.\vec{k}$$

e a velocidade ocorre apenas no plano  $xy$ , com componente vertical nula:

$$\vec{V} = u.\vec{i} + v.\vec{j} + 0.\vec{k}$$

Neste caso o termo advectivo seria nulo, pois  $\vec{V} \bullet \nabla\rho$  seria nulo. Poderíamos ter então um oceano incompressível e não homogêneo, pois continuaria existindo variação espacial da densidade, ainda que só na vertical. Quando consideramos o oceano incompressível as equações para conservação de sal e calor podem ser reescritas, pois os termos advectivos (segundo termo do lado esquerdo das equações 5.42 e 5.47) que envolvem derivadas de produtos entre  $\vec{V}$  e  $S$  ou  $T$  podem ser modificados da seguinte forma:

$$\frac{\partial\rho S}{\partial t} + \vec{V} \nabla\rho S + \rho S \nabla\vec{V} = k_{ds} \nabla^2 \rho S \quad (5.52)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \nabla T + T \nabla\vec{V} = k_{dc}^* \nabla^2 T \quad (5.53)$$

e como  $\nabla \vec{V} = 0$  quando o fluido é incompressível, então:

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \vec{V} \nabla \rho S = k_{ds} \nabla^2 \rho S \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \nabla T = k_{dc}^* \nabla^2 T \quad (5.55)$$

Esta é a forma na qual as equações para conservação de sal e calor deverão ser usadas pois quase sempre consideraremos o oceano incompressível.



# Capítulo 6

## A Escala dos Processos Oceânicos

Em *Dinâmica dos Oceanos* enfocamos o movimento dos oceanos, mas muitos processos estão associados ao movimento, como distribuição de clorofila, oxigênio, sais nutrientes, salinidade e temperatura da água, portanto estes processos devem apresentar as mesmas variações que encontramos no movimento da água do mar. Diversos processos ocorrem nos oceanos e mares ao mesmo tempo, cada qual tem uma ordem de grandeza característica, em termos de espaço e tempo. Podemos dizer, então, que o movimento nos oceanos é uma composição de diversos movimentos, cada qual associado a uma origem diferente, com frequência e período típicos. Em uma análise de registros de correntes oceânicas devemos encontrar desde variações com período de poucos segundos até vários meses. Cada uma destas variações deve apresentar também uma escala espacial característica. Os movimentos com período de poucos segundos até vários minutos incluem principalmente as ondas geradas por vento. Os movimentos com período entre alguns minutos até 24 horas incluem, além das ondas geradas por vento, as marés e correntes de maré. Como estes movimentos são assunto da disciplina de **Ondas e Marés** restam-nos os movimentos que tem período superior a 1 dia. Algumas componentes de maré apresentam período de variação superior a 1 dia, mas estas são muito pequenas. Além disto, alguns movimentos oceânicos, que são assunto de *Dinâmica dos Oceanos*, podem apresentar período menor que 24 horas (como são os movimentos inerciais), e neste caso serão considerados. Estamos então interessados em movimentos que tem um período de variação maior que o período das marés, e frequência menor que das marés por isto são chamados de *sub-tidais*. Estes movimentos são as correntes geradas por vento e movimentos associadas a estas (como os movimentos geostróficos) e ondas de larga escala, como ondas de Rossby, ondas de Kelvin e outras, as quais são influenciadas pela rotação do planeta. Além disto, estamos interessados na circulação termohalina, cujo período de variação é bastante superior (em torno de alguns meses).

### 6.1 Processos Turbulentos nos Oceanos

Apesar de não estarmos centrando nosso estudo nos movimentos de pequena escala estes são de extrema importância. Nos oceanos os movimentos de menor escala são responsáveis pela dissipação da energia, fenômeno que permite a estabilidade dos movimentos de maior escala.

Se não houvesse a dissipação da energia a entropia dos sistemas oceânicos cresceria a ponto de atingir o caos. Mas, ao invés disto, como podemos observar as células de circulação oceânica mantém sua conformação básica, com pequenas variações. A energia dos movimentos de larga escala é transferida para movimentos de escalas cada vez menor até ser dissipada nos movimentos de escala bastante pequena. Em última análise o responsável pela dissipação é o atrito. Tomemos como exemplo a célula de circulação anticiclônica do oceano Atlântico Sul. A escala do movimento que envolve as correntes do Brasil e de Benguela, a deriva para leste e a corrente sul-equatorial, que formam o giro deste oceano, é da ordem de milhares de quilômetros. Associados a este giro existem movimentos menores, como os vórtices e meandros das correntes, cuja escala espacial é da ordem de algumas dezenas de quilômetros e, finalmente, paralelos a estes existem turbilhões de pequena escala. O que gera os meandros, os vórtices e estes turbilhões são os cisalhamentos das correntes e, como vimos, a força associada ao cisalhamento de corrente é a força de atrito. O giro oceânico se mantém estável por que está sempre perdendo energia (a energia absorvida a partir do vento) pelos vórtices que se desprendem das correntes e se dissipam em movimentos de escalas menores. O que faz a transferência de energia do giro oceânico para os meandros e vórtices e depois para os turbilhões até ser dissipada é o atrito entre lâminas de água que se locomovem com velocidades diferentes. Este fenômeno de transferência de energia para escalas cada vez menores até ser dissipada é chamado de **Cascata de Energia**.

Estes movimentos de pequena escala é o que conhecemos como turbulência. Podemos separar o movimento em um movimento médio, que é o movimento de maior escala, o qual é mais ou menos estável, e movimentos menores, que apresentam grande variabilidade, cuja escala, tanto espacial como temporal, é bastante pequena quando comparada à do movimento médio, e que são denominados de movimentos turbulentos. Em suma, podemos dizer que o movimento é composto de uma média e desvios em torno da média. Estamos interessados em descrever o movimento médio. Os movimentos de pequena escala englobam os movimentos associados às ondas geradas por vento e movimentos paralelos, associados às marés e às correntes oceânicas. As marés não são consideradas mas os outros serão levados em consideração na forma de uma parametrização, como veremos a seguir.

Separamos as variáveis  $u, v, w$  e  $p$ <sup>1</sup> em média e desvios da média :

$$\begin{aligned} \cdot & \quad u = \bar{u} + \tilde{u} \\ \cdot & \quad v = \bar{v} + \tilde{v} \\ \cdot & \quad w = \bar{w} + \tilde{w} \\ \cdot & \quad p = \bar{p} + \tilde{p} \end{aligned}$$

A barra indica a média e o “til” indica o desvio sobre a média.

Antes de substituir estas variáveis separadas nas equações da continuidade e movimento vamos reescrever as 3 componentes da equação do movimento (equações 5.28, 5.29 e 5.30) considerando que:

---

<sup>1</sup>as variáveis calor, salinidade e as outras citadas no início do capítulo, cuja distribuição depende do movimento da água, também podem ser separadas em média e desvios

- A derivada total da velocidade é desdobrada em local + advectiva:  $\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla\vec{V}$ ;
- Os termos de Coriolis  $2\vec{\Omega}\cos\theta$  e  $2\vec{\Omega}\sin\theta$  são denominados, respectivamente, de  $\ddot{f}$  e  $f$ ;
- Os termos de atrito são separados em horizontal e vertical:  $\nu \cdot \nabla^2\vec{V} = \nu_h \cdot \nabla_h^2\vec{V} + \nu_v \cdot \frac{\partial^2\vec{V}}{\partial z^2}$ , onde:  $\nu_h$  e  $\nu_v$  são os coeficientes de viscosidade horizontal e vertical, respectivamente, e  $\nabla_h^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  é o laplaciano horizontal.

E assim montamos, juntamente com a equação 5.51, um sistema de equações possível e determinado:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla u + \ddot{f} \cdot w - f \cdot v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_h \cdot \nabla_h^2 u + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla v + f \cdot u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu_h \cdot \nabla_h^2 v + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla w - \ddot{f} \cdot u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu_h \cdot \nabla_h^2 w + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (6.4)$$

Separamos os termos de atrito em vertical e horizontal porque os movimentos tem ordem de grandeza diferente nestas duas direções, e o cisalhamento do movimento também, portanto utilizamos coeficientes de diferentes.

Substituindo então os valores médios + desvios nestas equações teremos:

$$\frac{\partial(\bar{u} + \tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v} + \tilde{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{w} + \tilde{w})}{\partial z} = 0 \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{u} + \tilde{u})}{\partial t} + (\bar{\vec{V}} + \tilde{\vec{V}}) \cdot \nabla(\bar{u} + \tilde{u}) + \ddot{f} \cdot (\bar{w} + \tilde{w}) - f \cdot (\bar{v} + \tilde{v}) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} + \tilde{p})}{\partial x} + \dots \\ + \nu_h \cdot \nabla_h^2(\bar{u} + \tilde{u}) + \nu_v \cdot \frac{\partial^2(\bar{u} + \tilde{u})}{\partial z^2} & \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{v} + \tilde{v})}{\partial t} + (\bar{\vec{V}} + \tilde{\vec{V}}) \cdot \nabla(\bar{v} + \tilde{v}) + f \cdot (\bar{u} + \tilde{u}) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} + \tilde{p})}{\partial y} + \dots \\ + \nu_h \cdot \nabla_h^2(\bar{v} + \tilde{v}) + \nu_v \cdot \frac{\partial^2(\bar{v} + \tilde{v})}{\partial z^2} & \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{w} + \tilde{w})}{\partial t} + (\bar{\vec{V}} + \tilde{\vec{V}}) \cdot \nabla(\bar{w} + \tilde{w}) - \ddot{f} \cdot (\bar{u} + \tilde{u}) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} + \tilde{p})}{\partial z} - g + \dots \\ + \nu_h \cdot \nabla_h^2(\bar{w} + \tilde{w}) + \nu_v \cdot \frac{\partial^2(\bar{w} + \tilde{w})}{\partial z^2} & \end{aligned} \quad (6.8)$$

ou seja:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{u} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \tilde{u} + \tilde{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{u} + \tilde{\vec{V}} \cdot \nabla \tilde{u} + \ddot{f} \cdot \bar{w} + \ddot{f} \cdot \tilde{w} - f \cdot \bar{v} - f \cdot \tilde{v} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \dots \\ + \nu_h \cdot \nabla_h^2 \bar{u} + \nu_h \cdot \nabla_h^2 \tilde{u} + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} & \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{v} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \tilde{v} + \tilde{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{v} + \tilde{\vec{V}} \cdot \nabla \tilde{v} + f \cdot \bar{u} + f \cdot \tilde{u} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \dots \\ + \nu_h \cdot \nabla_h^2 \bar{v} + \nu_h \cdot \nabla_h^2 \tilde{v} + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} & \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{w} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \tilde{w} + \tilde{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{w} + \tilde{\vec{V}} \cdot \nabla \tilde{w} - \ddot{f} \cdot \bar{u} - \ddot{f} \cdot \tilde{u} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} - g + \dots \\ + \nu_h \cdot \nabla_h^2 \bar{w} + \nu_h \cdot \nabla_h^2 \tilde{w} + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} & \end{aligned} \quad (6.12)$$

Agora fazemos a média das equações 6.9, 6.10, 6.11 e 6.12 (pois queremos os processos de larga e média escala, e não os processos turbulentos). Ao calcular a média destas equações fazemos a média termo a termo, levando em consideração que:

- A média da média é a própria média;
- A média do desvio é nula;
- A média do produto de médias continua sendo um produto de médias;
- A média do produto entre média e desvio é nula;
- A média do produto de desvios não é nula.

Assim, todos os termos que envolvem apenas uma variável “til” ou um produto “til x barra” são eliminados pois “a média de um desvio é nula, dado que este é a variação em torno da média.” Apenas os termos que envolvem somente médias ou produto de média e produto de desvios não são eliminados. A média do produto de desvios não é nula pois o produto entre desvios implica em uma potência quadrática de um desvio, que deixa de ser uma simples variação em torno da média. Portanto ficamos com:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{u} + \overline{\vec{V} \cdot \nabla \tilde{u}} + \bar{f} \cdot \bar{w} - f \cdot \bar{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu_h \cdot \nabla_h^2 \bar{u} + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{v} + \overline{\vec{V} \cdot \nabla \tilde{v}} + f \cdot \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu_h \cdot \nabla_h^2 \bar{v} + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{w} + \overline{\vec{V} \cdot \nabla \tilde{w}} - \bar{f} \cdot \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g + \nu_h \cdot \nabla_h^2 \bar{w} + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \quad (6.16)$$

Continuamos com nossas equações do movimento com excessão de um termo que é a média do produto entre  $\vec{V}$  e o divergente de  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  ou  $\tilde{w}$ . Este termo implica em uma interação entre desvios de velocidade, ou seja, são os termos que representam a turbulência, portanto são de extrema importância pois representam a cascata de energia. Vamos parametrizar estes termos na forma de um coeficiente que represente numericamente a transferência de energia e a dissipação da mesma. Não incluir estes termos no modelo através do qual se pretende representar o movimento significa não levar em consideração os fenômenos citados acima, e isto pode levar a instabilidades que impossibilitam a resolução das equações do movimento. Estes termos são chamados, na linguagem matemática, de termos não lineares, pois envolvem produtos de incógnitas. Matematicamente os termos não lineares implicam em um produto do vetor velocidade com o divergente de uma das componentes da velocidade e são resolvidos através de um produto escalar:

$$\overline{\vec{V} \bullet \nabla \tilde{u}} = \overline{\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}} + \overline{\tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}} + \overline{\tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}} = \frac{\partial(\tilde{u} \cdot \tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v} \cdot \tilde{u})}{\partial y} + \frac{\partial(\tilde{w} \cdot \tilde{u})}{\partial z} - \overline{\tilde{u} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}} - \overline{\tilde{u} \cdot \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}} - \overline{\tilde{u} \cdot \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}} \quad (6.17)$$

$$\overline{\vec{V} \bullet \nabla \tilde{v}} = \overline{\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}} + \overline{\tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}} + \overline{\tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z}} = \frac{\partial(\tilde{u} \cdot \tilde{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v} \cdot \tilde{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\tilde{w} \cdot \tilde{v})}{\partial z} - \overline{\tilde{v} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}} - \overline{\tilde{v} \cdot \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}} - \overline{\tilde{v} \cdot \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}} \quad (6.18)$$

$$\overline{\vec{V} \bullet \nabla \tilde{w}} = \overline{\tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}} + \overline{\tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y}} + \overline{\tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}} = \frac{\partial(\tilde{u} \cdot \tilde{w})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v} \cdot \tilde{w})}{\partial y} + \frac{\partial(\tilde{w} \cdot \tilde{w})}{\partial z} - \overline{\tilde{w} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}} - \overline{\tilde{w} \cdot \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}} - \overline{\tilde{w} \cdot \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}} \quad (6.19)$$

ou seja,

$$\overline{\vec{V} \bullet \nabla \tilde{u}} = \frac{\overline{\partial(\tilde{u}.\tilde{u})}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial(\tilde{v}.\tilde{u})}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial(\tilde{w}.\tilde{u})}}{\partial z} - \overline{\tilde{u}.\nabla \vec{V}} \quad (6.20)$$

$$\overline{\vec{V} \bullet \nabla \tilde{v}} = \frac{\overline{\partial(\tilde{u}.\tilde{v})}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial(\tilde{v}.\tilde{v})}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial(\tilde{w}.\tilde{v})}}{\partial z} - \overline{\tilde{v}.\nabla \vec{V}} \quad (6.21)$$

$$\overline{\vec{V} \bullet \nabla \tilde{w}} = \frac{\overline{\partial(\tilde{u}.\tilde{w})}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial(\tilde{v}.\tilde{w})}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial(\tilde{w}.\tilde{w})}}{\partial z} - \overline{\tilde{w}.\nabla \vec{V}} \quad (6.22)$$

E como  $\nabla \vec{V} = 0$  (incompressibilidade) ficamos com:

$$\overline{\vec{V} \bullet \nabla \tilde{u}} = \frac{\overline{\partial(\tilde{u}.\tilde{u})}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial(\tilde{v}.\tilde{u})}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial(\tilde{w}.\tilde{u})}}{\partial z} \quad (6.23)$$

$$\overline{\vec{V} \bullet \nabla \tilde{v}} = \frac{\overline{\partial(\tilde{u}.\tilde{v})}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial(\tilde{v}.\tilde{v})}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial(\tilde{w}.\tilde{v})}}{\partial z} \quad (6.24)$$

$$\overline{\vec{V} \bullet \nabla \tilde{w}} = \frac{\overline{\partial(\tilde{u}.\tilde{w})}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial(\tilde{v}.\tilde{w})}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial(\tilde{w}.\tilde{w})}}{\partial z} \quad (6.25)$$

Os produtos entre  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  e  $\tilde{w}$  são parametrizados na forma de um coeficiente e um cisalhamento da velocidade média, pois como sabemos estas velocidades turbulentas são formadas devido ao cisalhamento entre as lâminas d'água do fluxo médio:

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{u}.\tilde{u}} &= \tilde{\nu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \\ \overline{\tilde{v}.\tilde{u}} &= \tilde{\nu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\ \overline{\tilde{w}.\tilde{u}} &= \tilde{\nu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ \overline{\tilde{u}.\tilde{v}} &= \tilde{\nu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \\ \overline{\tilde{v}.\tilde{v}} &= \tilde{\nu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \\ \overline{\tilde{w}.\tilde{v}} &= \tilde{\nu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \\ \overline{\tilde{u}.\tilde{w}} &= \tilde{\nu} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \\ \overline{\tilde{v}.\tilde{w}} &= \tilde{\nu} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \\ \overline{\tilde{w}.\tilde{w}} &= \tilde{\nu} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{aligned}$$

$\tilde{\nu}$  é um coeficiente que expressa o efeito da turbulência como agente homogeneizador dos gradientes de velocidade, por isto atua de forma semelhante a viscosidade molecular do fluido ( $\nu$ ) por isto é chamado de coeficiente de viscosidade turbulenta. A turbulência tem o efeito de distribuir propriedades no fluido com muito mais eficiência que os processos moleculares, por isto o coeficiente de viscosidade turbulenta é muito maior que o coeficiente de viscosidade

molecular. Na análise de escala que deverá ser feita na secção seguinte a ordem de grandeza utilizada para  $\nu$  é característica de um coeficiente de viscosidade turbulenta. O coeficiente de viscosidade molecular é muitas ordens de grandeza inferior ao turbulento e seu efeito chega a ser desprezível em comparação ao primeiro. Utilizando o conceito de  $\tilde{\nu}$  nas equações 6.14, 6.15 e 6.16 podemos reescrevê-las da seguinte forma:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \bar{u} + \nabla(\tilde{\nu} \cdot \nabla \bar{u}) + \ddot{f} \cdot \bar{w} - f \cdot \bar{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu_h \cdot \nabla_h^2 \bar{u} + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \bar{v} + \nabla(\tilde{\nu} \cdot \nabla \bar{v}) + f \cdot \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu_h \cdot \nabla_h^2 \bar{v} + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \bar{w} + \nabla(\tilde{\nu} \cdot \nabla \bar{w}) - \ddot{f} \cdot \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g + \nu_h \cdot \nabla_h^2 \bar{w} + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \quad (6.28)$$

E caso diferenciemos o efeito da turbulência na horizontal e na vertical, pois os movimentos tem escala diferentes nestas direções, podemos separar  $\tilde{\nu}$  em horizontal,  $\tilde{\nu}_h$ , e vertical,  $\tilde{\nu}_v$ . Se estes coeficientes forem constantes podemos fazer:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \bar{u} + \ddot{f} \cdot \bar{w} - f \cdot \bar{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu_h \cdot \nabla_h^2 \bar{u} + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + \tilde{\nu}_h \cdot \nabla_h^2 \bar{u} + \tilde{\nu}_v \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \bar{v} + f \cdot \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu_h \cdot \nabla_h^2 \bar{v} + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} + \tilde{\nu}_h \cdot \nabla_h^2 \bar{v} + \tilde{\nu}_v \cdot \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \quad (6.30)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \bar{w} - \ddot{f} \cdot \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g + \nu_h \cdot \nabla_h^2 \bar{w} + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} + \tilde{\nu}_h \cdot \nabla_h^2 \bar{w} + \tilde{\nu}_v \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \quad (6.31)$$

Como  $\nu$  é muito menor que  $\tilde{\nu}$  desprezamos os termos de atrito que levam o coeficiente molecular:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \bar{u} + \ddot{f} \cdot \bar{w} - f \cdot \bar{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \tilde{\nu}_h \cdot \nabla_h^2 \bar{u} + \tilde{\nu}_v \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \bar{v} + f \cdot \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \tilde{\nu}_h \cdot \nabla_h^2 \bar{v} + \tilde{\nu}_v \cdot \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \bar{w} - \ddot{f} \cdot \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g + \tilde{\nu}_h \cdot \nabla_h^2 \bar{w} + \tilde{\nu}_v \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \quad (6.34)$$

## 6.2 Análise de Escala dos Processos Oceânicos

Para analisar a escala dos processos que vamos estudar teremos que dar uma escala característica para cada variável que aparecem nas equações, ou seja, vamos associar a  $u, v, w$  e  $p$  um valor, equivalente a ordem de grandeza destas variáveis característica para estes processos. Vamos considerar que:

- .  $L$  é a escala característica de distância horizontal;
- .  $H$  é a escala característica de distância vertical;
- .  $U$  é a escala característica de velocidade horizontal;
- .  $W$  é a escala característica de velocidade vertical;
- .  $T$  é a escala característica de tempo;

ou seja,  $L$  e  $H$  são as distâncias características, horizontais e verticais, das variações espaciais dos processos que estamos interessados.  $T$ , a escala de tempo, é considerada como sendo o período de repetição das variações dos movimentos advectivos (movimentos horizontais médios), assim  $U = L/T$  e  $T = L/U$ . Os valores destas escalas variam de acordo com o movimento que estamos estudando. Para simplificar, vamos colocar as escalas em ordens de grandezas de potências de base 10, ou seja, as escalas das variáveis devem variar em termos de  $10^n$ , onde  $n = \dots -3, -2 -1, 0, 1, 2, 3\dots$ .

Assim, vamos verificamos que  $L$  deve variar entre  $10^5$  até  $10^7$  metros, pois os movimentos que estudaremos devem ocorrer ao longo de distâncias que variam entre 100.000 até 10.000.000 de metros <sup>2</sup>. Como os valores podem variar um pouco em torno de 100.000 ou 10.000.000, dizemos que  $L$  deve ter ordem de grandeza  $10^5$  ou  $10^7$ , mas tendo em mente que um pouco acima ou um pouco abaixo de 100.000 continua sendo ordem de grandeza  $10^5$ . Assim 95.000 ou 120.500 tem a mesma ordem de grandeza, ou seja, 100.000 (escreve-se  $O(10^5)$ ). O limite entre uma ordem de grandeza e outra é a metade do intervalo da escala logaritmica, ou seja, o limite entre  $10^5$  e  $10^6$  é 500.000, acima disto a ordem de grandeza é  $10^6$  e abaixo disto é  $10^5$ . Portanto, ficamos com a seguinte escala:

- . de 0,00051 até 0,005 =  $O(10^{-3})$
- . de 0,0051 até 0,05 =  $O(10^{-2})$
- . de 0,051 até 0,5 =  $O(10^{-1})$
- . de 0,51 até 5 =  $O(10^0)$
- . de 5,1 até 50 =  $O(10^1)$
- . de 50,1 até 500 =  $O(10^2)$

e assim por diante.

Portanto a escala das variáveis no oceano deve ser:

- .  $L$  entre  $O(10^5)$  até  $O(10^7)$  metros;
- .  $H$  entre  $O(10^2)$  até  $O(10^4)$  metros;

---

<sup>2</sup>Usamos sempre o sistema MKS, ou seja, metros, segundos, kilograma e pascal para pressão.



- .  $U$  entre  $O(10^{-1})$  até  $O(10^0)$  metros/segundo;
- .  $W$  entre  $O(10^{-4})$  até  $O(10^{-3})$  metros/segundo;

A escala de tempo deve variar entre  $10^7$  e  $10^6$ , que é a escala de tempo dos movimentos oceânicos com frequência sub-tidal: de poucos dias a poucos meses.

A fim de obtermos uma escala característica para a pressão dividimos o campo dessa variável em um estado básico, que está em equilíbrio hidrostático, e um estado perturbatório, o qual representa os desvios do campo de pressão em relação ao estado básico. O estado básico ocorre no oceano estacionário (oceano parado ou sem aceleração), e os desvios do estado básico são causados pela passagem de ondas ou qualquer outro movimento que perturbe o balanço hidrostático.

Assim, ficamos com:  $p = p_h(z) + p_d(x, y, z, t)$ , onde  $p_h$  é a pressão hidrostática, a qual varia apenas na direção vertical ( $z$ ), e  $p_d$  são os desvios de pressão, os quais variam em  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $t$ .

Usaremos o símbolo  $P$  para a escala característica da pressão hidrostática, e  $\Delta P$  para a escala característica dos desvios de pressão. A escala da pressão hidrostática obtemos a partir do equilíbrio hidrostático de Pascal segundo o qual:  $P(z) = P(0) + \rho \cdot g \cdot h$ . Na superfície  $P = 1 atm$ , e abaixo disto  $P$  deve variar em  $1 atm$  a cada  $10 metros$ .

Como uma escala característica para  $H$  é  $O(10^3)$ , variando entre  $O(10^2)$  na plataforma continental, e  $O(10^4)$  em regiões abissais, utilizaremos uma profundidade de 1.000 metros para estimar a escala da pressão. A esta profundidade a pressão é:

$$P(1000) = 1 atm + 1.027(kg/m^3) \cdot 9,8(m/s^2) \cdot 1.000(m), \text{ ou seja, } P(1000) = 1 atm + 10^7 kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$$

A unidade  $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$  corresponde a um  $N/m^2$ , a qual é um  $Pa$  (pascal). A relação entre  $atm$  e  $Pa$  é:

$$1 Pa = 9,869 \times 10^{-6} atm \quad (6.35)$$

Portanto o equilíbrio hidrostático fica:

$$P(1000) = 1 atm + 9,869 \times 10^{-6} \times 1,00646 \times 10^7 = 1 + 99,327 = 100,327 atm \quad (6.36)$$

ou

$$P(1000) = 1,013 \times 10^5 Pa + 1,00646 \times 10^7 = 1,01676 \times 10^7 Pa \quad (6.37)$$

Como no sistema MKS a unidade de pressão é o  $Pa$  utilizamos  $10^7 Pa$  como ordem de grandeza da pressão hidrostática. A densidade no oceano varia em torno de 1025 ou 1027  $kg \cdot m^{-3}$ . A gravidade tem valor  $9,8 m \cdot s^{-2}$ . O parâmetro de Coriolis, de acordo como é

definido:  $2\vec{\Omega}\text{sen}\theta$  ou  $2\vec{\Omega}\text{cos}\theta$ , tem valor aproximado de  $1,45 \times 10^{-4} \text{s}^{-1}$  pois  $\vec{\Omega} = 7,272 \times 10^{-5}$  e  $\text{sen}\theta$  e  $\text{cos}\theta$  variam entre 0 e 1. O coeficiente de viscosidade  $\nu$  é uma parametrização dos processos de difusão. Através de experiências, no mar e em laboratórios, ficou provado que este parâmetro deve variar entre  $10^{-2}$  e  $10^2 \text{m}^2.\text{s}^{-1}$

As escalas características para  $f, \ddot{f}, \rho, g$  e  $\nu$  são os próprios  $f, \ddot{f}, \rho, g$  e  $\nu$ , respectivamente. Porém, utilizamos o subscrito 0 para facilitar o entendimento. Portanto ficamos com:

- .  $T = \text{entre } O(10^6) \text{ até } O(10^7) \text{ segundos.}$
- .  $P = O(10^7) \text{ pascal.}$
- .  $\rho_0 = O(10^3) \text{ kg/metro}^3.$
- .  $g_0 = O(10^1) \text{ metro/segundo}^2.$
- .  $f_0 \text{ e } \ddot{f}_0 = O(10^{-4}) \text{ segundos}^{-1}.$
- .  $\nu_0 = \text{entre } O(10^{-2}) \text{ até } O(10^2) \text{ metro}^2/\text{segundo.}$

Em geral os coeficientes de viscosidade vertical e horizontal têm ordem de grandeza diferente, mas vamos utilizar a mesma ordem de grandeza para ambos porque não pretendemos chegar ao detalhamento de analisar separadamente a parametrização dos processos turbulentos. Veremos que, apenas pela ordem de grandeza de  $U, W, L$  e  $H$  chegaremos a ordens de grandeza diferentes para os termos de atrito vertical e horizontal.

### 6.2.1 Adimensionalização das Variáveis

Para analisar a importância relativa de cada termo das equações fazemos uma adimensionalização das variáveis e substituímos nas equações. Assim:

- .  $x = L.x'$
- .  $y = L.y'$
- .  $z = H.z'$
- .  $u = U.u'$
- .  $v = U.v'$
- .  $w = W.w'$
- .  $t = T.t'$
- .  $p = P.p'_h + \Delta P p'_d$
- .  $f = f_0.f'$
- .  $\ddot{f} = \ddot{f}_0.\ddot{f}'$
- .  $\rho = \rho_0.\rho'$
- .  $g = g_0.g'$
- .  $\nu_h = \nu_0.\nu'_h$
- .  $\nu_v = \nu_0.\nu'_v$

As variáveis acompanhadas de uma linha são as variáveis adimensionalizadas.

Portanto a equação da continuidade torna-se:

$$\frac{U}{L} \cdot \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = \frac{W}{H} \cdot \left( -\frac{\partial w'}{\partial z'} \right) \quad (6.38)$$

A partir da equação 6.38 podemos tirar uma escala para  $W$  em função de  $U$  :

$$\frac{U}{L} \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = \frac{W}{H} \left( -\frac{\partial w'}{\partial z'} \right) = 0 \quad (6.39)$$

Considerando somente as escalas, já que os termos entre parenteses estão adimensionalizados, veremos que:

$$\frac{U}{L} = \frac{W}{H} \quad (6.40)$$

ou seja:

$$W = \frac{HU}{L} = \delta U \quad (6.41)$$

onde:  $\delta = H/L$  é um parâmetro conhecido como razão de aspecto do movimento, pois compara a escala espacial vertical com a horizontal. Em geral  $\delta$  é sempre menor que 1.

As 3 componentes da equação do movimento (equações 6.32, 6.33 e 6.34) nós reescrevemos antes de adimensionalizar, sem colocar as barras sobre as variáveis para facilitar a escrita, porém tendo em mente que estamos trabalhando com as equações que representam os processos médios e os processos turbulentos foram parametrizados na forma de um coeficiente de viscosidade turbulenta, além disto separamos os termos advectivos em suas componentes horizontal e vertical para que possamos analisar a escala adequadamente. Além disso o campo de pressão foi quebrado em uma parcela hidrostática e outra que são os desvios de pressão, lembrando sempre que a parcela hidrostática ( $p_h$ ) varia apenas em  $z$ . Portanto as derivadas em  $x$  e  $y$  de  $p_h$  se anulam.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V}_h \cdot \nabla_h u + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \vec{f} \cdot w - f \cdot v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_d}{\partial x} + \tilde{\nu}_h \cdot \nabla_h^2 u + \tilde{\nu}_v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (6.42)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V}_h \cdot \nabla_h v + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + f \cdot u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_d}{\partial y} + \tilde{\nu}_h \cdot \nabla_h^2 v + \tilde{\nu}_v \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (6.43)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V}_h \cdot \nabla_h w + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} - \vec{f} \cdot u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_h + p_d}{\partial z} - g + \tilde{\nu}_h \cdot \nabla_h^2 w + \tilde{\nu}_v \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (6.44)$$

onde:  $\nabla_h = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$  é a componente horizontal de  $\nabla$  e  $\vec{V}_h = u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j}$  é a componente horizontal de  $\vec{V}$ .

Estas equações adimensionalizadas tornam-se:

Componente  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{U}{T} \left( \frac{\partial u'}{\partial t'} \right) + \frac{U^2}{L} (\vec{V}'_h \cdot \nabla_h u') + \frac{W \cdot U}{H} (w' \cdot \frac{\partial u'}{\partial z'}) + \ddot{f}_0 W (\ddot{f}' \cdot w') - f_0 U (f' \cdot v') = \dots \\ - \frac{\Delta P}{\rho_0 L} \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_d}{\partial x'} \right) + \frac{\nu_0 U}{L^2} (\nu'_h \cdot \nabla_h^2 u') + \frac{\nu_0 U}{H^2} (\nu'_v \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}) \end{aligned} \quad (6.45)$$

Componente  $y$ :

$$\begin{aligned} \frac{U}{T} \left( \frac{\partial v'}{\partial t'} \right) + \frac{U^2}{L} (\vec{V}'_h \cdot \nabla_h v') + \frac{W \cdot U}{H} (w' \cdot \frac{\partial v'}{\partial z'}) + f_0 U (f' \cdot u') = \dots \\ - \frac{\Delta P}{\rho_0 L} \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_d}{\partial y'} \right) + \frac{\nu_0 U}{L^2} (\nu'_h \cdot \nabla_h^2 v') + \frac{\nu_0 U}{H^2} (\nu'_v \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2}) \end{aligned} \quad (6.46)$$

Componente  $z$ :

$$\begin{aligned} \frac{W}{T} \left( \frac{\partial w'}{\partial t'} \right) + \frac{UW}{L} (\vec{V}'_h \cdot \nabla_h w') + \frac{W^2}{H} (w' \cdot \frac{\partial w'}{\partial z'}) - \ddot{f}_0 U (\ddot{f}' \cdot u') = \dots \\ - \frac{P}{\rho_0 H} \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_h}{\partial z'} \right) - \frac{\Delta P}{\rho_0 H} \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_d}{\partial z'} + \frac{\nu_0 W}{L^2} (\nu'_h \cdot \nabla_h^2 w') + \frac{\nu_0 W}{H^2} (\nu'_v \cdot \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}) \right) + \dots \\ - g_0 (g') \end{aligned} \quad (6.47)$$

Ao analisarmos a ordem de grandeza de cada termo veremos que, nas componentes da equação do movimento, os termos de maior importância são:

- componentes horizontais: Termo de Coriolis e Gradiente de Pressão
- componente vertical: Gradiente de Pressão e Gravidade

Para os movimentos médios (movimentos com escala superior a dos movimentos turbulentos), com frequência subtidal, os termos de atrito e aceleração local são os termos de menor ordem de grandeza, mas dependendo da situação estes termos podem adquirir uma importância relativa considerável. Veremos que, em oceano aberto e longe das camadas de contorno (obedecidas determinadas condições), os termos de atrito são desprezíveis criando uma situação de equilíbrio entre as forças de Coriolis e Gradiente de Pressão, na horizontal, e forças do Gradiente de Pressão e Atração Gravitacional da Terra, na vertical. Estas situações de equilíbrio implicam em aceleração nula, portanto os termos de aceleração local deixam de ser considerados. Próximo aos contornos e sobre a plataforma continental, onde as interações com o fundo oceânico e com a atmosfera são importantes, os termos de atrito deixam de ser desprezíveis<sup>3</sup> desbalanceando o equilíbrio entre as forças citadas acima e gerando aceleração.

<sup>3</sup>Nestas regiões os valores utilizados para  $\nu$  são maiores, de  $O(10^2)$ , por isto o termo de atrito passa a ter maior importância.

Vamos agora fazer duas outras aproximações, além das que já foram feitas. Analisando a ordem de grandeza dos termos da equação 6.45 é possível observar que o termo  $\ddot{f}w$  é menor que  $fv$  em determinadas situações. Dividindo um pelo outro teremos :

$$\frac{\ddot{f}w}{fv} = \frac{\ddot{f}_0 W}{f_0 U} = \frac{2\tilde{\Omega} \cos\theta \delta U}{2\tilde{\Omega} \sin\theta U} = \cotan\theta \delta \quad (6.48)$$

Notamos que quando a cotangente de  $\theta$  for pequena é possível desprezar  $\ddot{f}w$  em comparação a  $fv$ , pois como vimos,  $\delta$ , a razão de aspecto do movimento é sempre menor que 1. Porém para que a cotangente de  $\theta$  seja pequena, o movimento a ser estudado não pode ocorrer próximo ao equador, dado que quanto menor o ângulo ( $\theta$ ) maior é a cotangente deste.

A segunda aproximação é feita na equação 6.47. Nesta equação podemos desprezar o termo  $\ddot{f}u$  em comparação a  $g$ , pois este tem uma ordem de grandeza bem menor que a gravidade. Ficamos então com as seguinte equações (em forma dimensional):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6.49)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla u - f \cdot v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_h \cdot \nabla_h^2 u + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (6.50)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla v + f \cdot u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu_h \cdot \nabla_h^2 v + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (6.51)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu_h \cdot \nabla_h^2 w + \nu_v \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (6.52)$$

Fazendo uma análise de todas as aproximações que foram feitas até agora para chegar até as equações 6.49, 6.50, 6.51 e 6.52:

1. Coordenadas cartesianas;
2. Oceano incompressível;
3. Oceano homogêneo;
4. Razão de aspecto do movimento muito menor que 1;
5. Cotangente de  $\theta$  menor que 1;
6. Parametrização dos processos turbulentos.

veremos que estamos restringindo nosso estudo a uma situação em que:

1. A escala espacial do movimento não pode ser muito grande, pois senão teríamos de usar coordenadas esféricas;
2. Os movimentos causados por gradientes de densidade, ou seja, a circulação termohalina, não serão estudados, pois estamos considerando o oceano homogêneo;
3. Os movimentos para os quais a escala espacial vertical for comparável a escala espacial horizontal não serão considerados, ou seja, principalmente aqueles movimentos de pequena escala que ocorrem sobre a plataforma continental, pois estamos assumindo que  $\delta$  é bem menor que 1;
4. Os movimentos a serem estudados não podem estar ocorrendo próximos ao equador, onde a cotangente de  $\theta$  não é pequena;
5. Os movimentos estudados são os movimentos médios.

### 6.2.2 Números de Froude, Ekman e Rossby

A delimitação entre “o que” é *larga escala* e *pequena escala* no oceano é algo um pouco variável. Qual a ordem de grandeza de um movimento para que seja considerado de larga escala ?? Um movimento que tenha uma escala espacial horizontal característica de 20 km é tão diferente de outro de 150 km ?? Para evitar esta confusão procuramos caracterizar um movimento não apenas por sua escala espacial mas também por sua dinâmica, isto é, se o movimento é ou não influenciado significativamente pelo movimento de rotação da Terra. Comparamos a escala do movimento em questão com a escala do movimento de rotação da Terra, se a primeira for muito menor que a última dizemos que o movimento não é influenciado pela rotação, e neste caso pode ser considerado um movimento de pequena escala, pelo contrário, quando a escala do movimento for de uma ordem de grandeza comparável a do movimento terrestre ou maior do que esta, então o movimento é de larga (ou média) escala, e neste caso é influenciado pela rotação (Coriolis). O tempo que um elemento de fluido, deslocando-se com velocidade característica  $U$ , demora para percorrer a distância característica  $L$  é  $L/U$ . Se este período de tempo for muito menor que o período de rotação da Terra ( $1/\vec{\Omega}$ ) então o fluido sentirá fracamente o efeito de Coriolis ao longo de sua trajetória. Para que este efeito seja importante devemos ter:

$$\frac{L}{U} \geq \frac{1}{\vec{\Omega}} \quad (6.53)$$

Lembrando a definição do parâmetro de Coriolis  $f = 2\vec{\Omega} \text{sen}\theta$ , podemos reescrever a equação 6.53 da seguinte forma:

$$\frac{U}{f_0 L} \leq 1 \quad (6.54)$$

onde:  $f_0 = 2\vec{\Omega} \text{sen}\theta$  é a escala característica do parâmetro de Coriolis.

A razão  $\frac{U}{f_0 L}$  define o parâmetro chamado de número de Rossby ( $R_b$ ). Em outras palavras:

*“fluxos de larga escala são definidos como aqueles com escala  $L$  suficientemente grande para que  $R_b$  tenha ordem de grandeza 1 ou menor”.*

O parâmetro de Rossby é adimensional pois levando-se em conta as unidades das variáveis  $U$ ,  $f_0$  e  $L$  veremos que:  $\frac{m/s}{1/s.m} = 1$ . Note que esta razão varia de acordo com a latitude, pois  $f_0$  varia em função do seno de  $\theta$ . Por isto precisamos de uma caracterização dinâmica da escala do movimento e não apenas de uma caracterização em função de sua escala de distância. Outro aspecto dos movimentos de larga escala é que, dada a grande escala horizontal de distância destes movimentos, esta se torna muito maior que a escala de distância vertical. Podemos dizer que estes movimentos ocorrem dentro de uma camada de fluido bastante fina, portanto a razão de aspecto do movimento é pequena:

$$\delta = \frac{H}{L} \ll 1 \quad (6.55)$$

*“fluxos de larga escala possuem, em geral, razão de aspecto muito pequena quando comparada ao número 1”.*

Para alguns movimentos no entanto, como as ondas, estabelecemos um limite para atuação do efeito da rotação da Terra de outra forma. É interessante estabelecermos este limite por que dependendo do tamanho de uma onda<sup>4</sup> ela se comporta de modo diferente. Porém, quão grande deve ser uma onda para que sofra o efeito da rotação ?? As ondas superficiais de pequena escala têm como mecanismo restaurador a gravidade, isto é, quando a superfície do mar se deforma por um motivo qualquer (a passagem de um centro de alta pressão, ou a atuação do vento, por exemplo) a atuação da força peso tende a trazê-la de volta a sua forma original, e isto gera a onda (ou mantém a onda). Nestas ondas a trajetória descrita pelas partículas de fluido é uma elipse vertical. No entanto, quando as ondas são muito grandes a força de Coriolis passa a atuar fazendo com que o movimento das partículas adquira uma componente horizontal. O limite a partir do qual Coriolis passa a ser importante é medido pelo **raio de deformação de Rossby** ( $R_D$ ).

$$R_D = \frac{\sqrt{g_0 H}}{f_0} \quad (6.56)$$

Como sabemos  $f_0$  tem unidade de frequência (1/s) pois deriva de  $\vec{\Omega}$ , a frequência de rotação da Terra, e  $\sqrt{g_0 H}$  tem unidade de  $m/s$  pois  $g_0$ , a escala característica da gravidade tem unidade  $m/s^2$  e  $H$  tem unidade  $m$ , portanto o raio de Rossby tem unidade de distância ( $m$ ). O termo  $\sqrt{g_0 H}$  é a escala característica da velocidade de propagação de ondas de gravidade superficiais em águas rasas<sup>5</sup>. Portanto o raio de Rossby compara a velocidade da onda com o parâmetro de Coriolis. O raio de Rossby mede o comprimento a partir do qual uma onda passa a ser influenciada pela rotação da Terra, em outras palavras, a escala horizontal

<sup>4</sup>Note que um dado movimento horizontal, como uma corrente ou um meandro, também pode ser uma onda, porém é uma onda que tem como mecanismo restaurador a força de Coriolis e não a gravidade.

<sup>5</sup>As ondas longas se comportam como ondas em águas rasas.

do movimento oscilatório na qual a tendência gravitacional em tornar a superfície plana é balanceada pela tendência da força de Coriolis em deformar a superfície. O parâmetro  $R_D$  também varia latitudinalmente pois depende de  $f_0$ .

O número de Froude compara a escala do movimento em questão com o raio de de deformação de Rossby:

$$F = \frac{L}{R_D} = \frac{L}{\sqrt{g_0 H}/f_0} = \frac{f_0^2 L^2}{g_0 H} \quad (6.57)$$

Ou seja, para uma dada latitude, existe uma distância a partir da qual o efeito da rotação da Terra passa a ser importante (o raio de Rossby), então, se a escala do movimento for pequena quando comparada com esta distância o movimento não deve se alterar por atuação de Coriolis. O movimento no caso é o movimento das partículas na passagem de uma onda.  $F$  também é um parâmetro adimensional pois tanto  $L$  como  $R_D$  tem unidade de distância ( $m$ ).

*“quando  $F \gg 1$  o campo de momento se ajusta ao campo de massa por que a influência da rotação é mais importante que a gravidade. Por outro lado, quando  $F \ll 1$  o campo de massa se ajusta ao campo de momento, indicando a importância da restauração gravitacional no equilíbrio”.*

Finalmente, o número de Ekman é um número que mede a importância do termo de atrito. Para alguns movimentos o atrito é extremamente importante, como os movimentos gerados pelo vento, pois o atrito do vento é que está gerando e mantendo o movimento. Para outros no entanto, como o fluxo geostrófico, este termo deixa de ter importância. Movimentos como o fluxo geostrófico então devem ocorrer onde não existe atrito, ou onde este é desprezível, longe portanto dos contornos do oceano. Este número é uma comparação entre as escalas do termo de atrito e a escala do parâmetro de Coriolis.

$$E = \frac{\nu_0 U/L^2}{U f_0} = \frac{\nu_0}{f_0 L^2} \quad (6.58)$$

O resultado é um número extremamente pequeno e adimensional também, pois  $\nu_0$  tem unidade de  $m^2/s$  então:  $\frac{\nu_0}{f_0 L^2} = \frac{m^2/s}{1/s \cdot m^2} = 1$ . No entanto, veremos que para alguns movimentos este parâmetro não é tão pequeno, e neste caso o efeito do atrito passa a não desprezível. Veremos que estes movimentos ocorrem dentro das camadas de contorno, ou seja, camadas de Ekman. Vamos separar o número de Ekman em vertical e horizontal. O número de Ekman horizontal é formulado de acordo com a equação 6.58 e o número de Ekman vertical é formulado em função de  $H$ .

$$E_h = \frac{\nu_0}{f_0 L^2} \quad (6.59)$$

$$E_v = \frac{\nu_0}{f_0 H^2} \quad (6.60)$$



Neste caso estamos assumindo que  $\nu_0$  é igual nas direções vertical e horizontal, mas isto nem sempre é verdade.

Vamos reformular as equações do movimento escaladas (equações 6.45, 6.46 e 6.47, porém já desprezados os termos acompanhados de  $\ddot{f}$ ), para podermos adimensionaliza-las:

- a escala de  $T$  do termo de aceleração é escrita em função de  $L$  e  $U$ .
- a escala de  $P$  do termo do gradiente de pressão é escrita em termos de  $\rho_0, g_0$  e  $H$ , levando-se em conta o equilíbrio hidrostático.
- a escala  $W$  é escrita em função de  $U$  e  $\delta$ .

Assim, ficamos com:

$$\frac{U^2}{L} \left( \frac{\partial u'}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \nabla u' \right) - f_0 U (f' \cdot v') = - \frac{\Delta \rho_0 g_0 H}{\rho_0 L} \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_d}{\partial x'} \right) + \frac{\nu_0 U}{L^2} (\nu'_h \cdot \nabla_h^2 u') + \frac{\nu_0 U}{H^2} (\nu'_v \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}) \quad (6.61)$$

$$\frac{U^2}{L} \left( \frac{\partial v'}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \nabla v' \right) + f_0 U (f' \cdot u') = - \frac{\Delta \rho_0 g_0 H}{\rho_0 L} \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_d}{\partial y'} \right) + \frac{\nu_0 U}{L^2} (\nu'_h \cdot \nabla_h^2 v') + \frac{\nu_0 U}{H^2} (\nu'_v \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2}) \quad (6.62)$$

Componente  $z$ :

$$\begin{aligned} \frac{\delta U^2}{L} \left( \frac{dw'}{dt'} + \vec{V}' \cdot \nabla w' \right) &= - \frac{\rho_0 g_0 H}{\rho_0 H} \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_h}{\partial z'} \right) - \frac{\Delta \rho_0 g_0 H}{\rho_0 H} \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_d}{\partial z'} \right) + \frac{\nu_0 W}{L^2} (\nu'_h \cdot \nabla_h^2 w') + \dots \\ &+ \frac{\nu_0 W}{H^2} (\nu'_v \cdot \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}) - g_0 (g') \end{aligned} \quad (6.63)$$

Vamos dividir todos os termos das equações 6.61 e 6.62 por  $f_0 U$ , pois desejamos comparar a escala de todos os termos com a escala do termo de Coriolis e os termos da equação 6.63 por  $g_0$ , pois neste caso o termo da gravidade é o termo de maior ordem de grandeza e desejamos fazer uma comparação dos outros termos com este último.

$$\frac{U^2}{f_0 U L} \left( \frac{\partial u'}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \nabla u' \right) - \frac{f_0 U}{f_0 U} (f' \cdot v') = - \frac{\Delta \rho_0 g_0 H}{f_0 U \rho_0 L} \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_d}{\partial x'} \right) + \frac{\nu_0 U}{f_0 U L^2} (\nu'_h \cdot \nabla_h^2 u') + \frac{\nu_0 U}{f_0 U H^2} (\nu'_v \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}) \quad (6.64)$$

$$\frac{U^2}{f_0 U L} \left( \frac{\partial v'}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \nabla v' \right) + \frac{f_0 U}{f_0 U} (f' \cdot u') = - \frac{\Delta \rho_0 g_0 H}{f_0 U \rho_0 L} \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_d}{\partial y'} \right) + \frac{\nu_0 U}{f_0 U L^2} (\nu'_h \cdot \nabla_h^2 v') + \frac{\nu_0 U}{f_0 U H^2} (\nu'_v \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2}) \quad (6.65)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta U^2}{g_0 L} \left( \frac{\partial w'}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \nabla w' \right) &= -\frac{\rho g_0 H}{\rho_0 g_0 H} \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_h}{\partial z'} \right) - \frac{\Delta \rho_0 g_0 H}{\rho_0 g_0 H} \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_d}{\partial z'} \right) + \frac{\nu_0 \delta U}{g_0 L^2} (\nu'_h \cdot \nabla_h^2 w') + \dots \\ &+ \frac{\nu_0 \delta U}{g_0 H^2} (\nu'_v \cdot \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}) - \frac{g_0}{g_0} (g') \end{aligned} \quad (6.66)$$

E ao reagruparmos todos os termos ficamos com:

$$\frac{U}{f_0 L} \left( \frac{\partial u'}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \nabla u' \right) - 1(f' \cdot v') = -\frac{\Delta g_0 H f_0 L}{f_0^2 L^2 U} \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_d}{\partial x'} \right) + \frac{\nu_0}{f_0 L^2} (\nu'_h \cdot \nabla_h^2 u') + \frac{\nu_0}{f_0 H^2} (\nu'_v \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}) \quad (6.67)$$

$$\frac{U}{f_0 L} \left( \frac{\partial v'}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \nabla v' \right) + 1(f' \cdot u') = -\frac{\Delta g_0 H f_0 L}{f_0^2 L^2 U} \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_d}{\partial y'} \right) + \frac{\nu_0}{f_0 L^2} (\nu'_h \cdot \nabla_h^2 v') + \frac{\nu_0}{f_0 H^2} (\nu'_v \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2}) \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta H U^2 f_0^2 L^2}{L g_0 H f_0^2 L^2} \left( \frac{\partial w'}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \nabla w' \right) &= -1 \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_h}{\partial z'} \right) - \Delta \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_d}{\partial z'} \right) + \frac{\nu_0 \delta H U f_0^2 L^2}{f_0 L^2 L f_0 L g_0 H} (\nu'_h \cdot \nabla_h^2 w') \dots \\ &+ \frac{\nu_0 \delta H U f_0^2 L^2}{f_0 H^2 L f_0 L g_0 H} (\nu'_v \cdot \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}) - \frac{g_0}{g_0} (g') \end{aligned} \quad (6.69)$$

ou seja:

$$R_b \left( \frac{\partial u'}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \nabla u' \right) - 1(f' \cdot v') = -\frac{\Delta}{F R_b} \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_d}{\partial x'} \right) + E_h (\nu'_h \cdot \nabla_h^2 u') + E_v (\nu'_v \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}) \quad (6.70)$$

$$R_b \left( \frac{\partial v'}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \nabla v' \right) + 1(f' \cdot u') = -\frac{\Delta}{F R_b} \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_d}{\partial y'} \right) + E_h (\nu'_h \cdot \nabla_h^2 v') + E_v (\nu'_v \cdot \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2}) \quad (6.71)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 F R_b \left( \frac{\partial w'}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \nabla w' \right) &= -1 \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_h}{\partial z'} \right) - \Delta \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'_d}{\partial z'} \right) + \delta^2 F R_b E_h (\nu'_h \cdot \nabla_h^2 w') + \dots \\ &+ \delta^2 F R_b E_v (\nu'_v \cdot \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}) - 1(g') \end{aligned} \quad (6.72)$$

Note que, nas componentes horizontais da equação do movimento, equações 6.70 e 6.71, os termos de maior ordem de grandeza são o termo de Coriolis que tem ordem 1, ou  $O(10^0)$  e o termo do Gradiente de Pressão que tem ordem de grandeza igual a 1, desde que  $\Delta = F R_b$ . O termo de aceleração é de ordem  $R_b$  e os termos de atrito são de ordem  $E_h$  e  $E_v$ , portanto também menores que 1. Na componente vertical, equação 6.72, os termos de maior ordem de grandeza são o termo do gradiente de pressão, do campo hidrostático, e gravidade que tem ordem 1. Nesta equação os termos de aceleração e atrito são  $\delta^2 F R_b$  menores que os respectivos termos nas equações horizontais, portanto muito menor que estes. A parcela não hidrostática da pressão tem ordem  $\Delta$ , o qual deve ser um número pequeno para que valha o equilíbrio entre Coriolis e gradiente de pressão na horizontal.

# Capítulo 7

## Correntes Oceânicas sem Fricção

Com o sistema de equações que obtivemos no capítulo passado é possível calcularmos diversos movimentos, mas a resolução deste sistema é um processo relativamente complicado, por isto começamos resolvendo cada tipo de movimento separadamente. Isto nos permite fazer algumas simplificações nas equações, tornando-as mais fáceis de serem trabalhadas.

Neste capítulo descrevemos um movimento que ocorre no oceano invíscido, ou seja, na porção do oceano onde o atrito não é importante. Como vimos, esta condição deve ser obedecida longe das camadas de Ekman, portanto estabelecemos como oceano invíscido aquela porção do oceano que fica entre as camadas de Ekman de fundo e de superfície. Como os efeitos do atrito do vento e atrito com o fundo oceânico são desprezíveis nesta região utilizamos um valor pequeno ( $O(10^{-2})$ ) para o coeficiente cinemático de viscosidade turbulenta ( $\tilde{\nu}$ ) e assim os termos de atrito das equações 6.70, 6.71 e 6.72 passam a ser desprezíveis, pois os números  $E_h$  e  $E_v$  tornam-se extremamente pequenos. Além disso, a ordem de grandeza de  $L, H, U$  e  $W$  no oceano invíscido contribue para que os números de Ekman sejam extremamente pequenos. Nossa equação do movimento em forma adimensionalizada tornam-se então:

componente x:

$$R_b \left( \frac{\partial u'}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \nabla u' \right) - 1(f' \cdot v') = \frac{1}{F} \frac{1}{R_b} \left( -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} \right) \quad (7.1)$$

componente y:

$$R_b \left( \frac{\partial v'}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \nabla v' \right) + 1(f' \cdot u') = \frac{1}{F} \frac{1}{R_b} \left( -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial y'} \right) \quad (7.2)$$

componente z:

$$\delta^2 F R_b^2 \left( \frac{\partial w'}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot \nabla w' \right) = 1 \left( \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial z'} \right) - 1(g') \quad (7.3)$$

Veremos que dois tipos de movimentos são particularmente importantes neste caso, o *Fluxo Geostrófico* e o *Fluxo Inercial*.

## 7.1 Fluxo Geostrófico

O fluxo geostrófico ocorre quando temos uma situação de fluxo estacionário (sem aceleração) na qual, devido ao efeito desprezível da força de atrito, ocorre um equilíbrio entre a força do gradiente de pressão e a força de Coriolis. Como já sabemos, desde o curso de Física, toda vez que as forças que atuam sobre uma partícula estão em equilíbrio, a resultante é nula e neste caso a aceleração também se anula. O balanço entre os termos de Coriolis e Gradiente de Pressão é denominado de *Balanço Geostrófico*, por isto o fluxo estacionário que resulta deste equilíbrio é chamado de *Fluxo Geostrófico*. O balanço geostrófico implica em equilíbrio hidrostático, porém de acordo com Pascal, o equilíbrio hidrostático é uma situação que ocorrem em fluídos estáticos. Assumiremos então uma situação especial em que, apesar de haver movimento, este movimento ocorre de forma tal que a diferença de pressão entre dois pontos na mesma linha vertical depende apenas do peso do fluído entre estes dois pontos, como se o fluído estivesse em repouso. Matematicamente, o fato da aceleração do movimento ser desprezível em relação ao termo de Coriolis é expresso através de um número de Rossby pequeno ( $R_b < 1$ ). O equilíbrio hidrostático implica, além de  $R_b < 1$  e  $\delta < 1$ , e um número de Froude de ordem 1 ou pouco maior que isso ( $F \geq 1$ ). Os movimentos de larga escala possuem um número de Froude da ordem 1 ou pouco maior.

Resumindo, trabalhamos com uma situação em que:

1.  $R_b < 1$  : a aceleração do movimento é pequena quando comparada com o parâmetro de Coriolis;
2.  $F \geq 1$  : A escala do movimento é da mesma ordem de grandeza ou pouco maior que o raio de Rossby<sup>1</sup>;
3.  $\delta < 1$  : a razão de aspecto do movimento é pequena;
4.  $E < 1$ : os termos de atrito são desprezíveis em comparação aos termos que participam do equilíbrio hidrostático.

Assim as equações 7.1, 7.2 e 7.3 são reescritas desprezando-se os termos de atrito e aceleração.

$$-1(f'.v') = \frac{1}{F} \frac{1}{R_b} \left( -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} \right) \quad (7.4)$$

$$+1(f'.u') = \frac{1}{F} \frac{1}{R_b} \left( -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial y'} \right) \quad (7.5)$$

$$1\left(\frac{\partial p'}{\partial z'}\right) = -1(\rho'.g') \quad (7.6)$$

As equações 7.4 e 7.5 representam o balanço geostrófico e a equação 7.6 o equilíbrio hidrostático.

---

<sup>1</sup>Lembre-se que os movimentos de escala muito grande foram descartados por que senão teríamos que estar utilizando coordenadas esféricas.

### 7.1.1 Dinâmica do Fluxo Geostrófico

O fluxo geostrófico ocorre nos oceanos toda vez que existe um gradiente de pressão (em uma escala espacial suficientemente grande para que o movimento gerado pela força do gradiente de pressão seja influenciado pela rotação da Terra), porém, o fluxo geostrófico puro, expresso matematicamente pelo balanço entre os termos de Coriolis e gradiente de pressão, ocorre apenas no oceano invíscido, onde o atrito é desprezível. Nas camadas de Ekman o fluxo geostrófico, quando ocorre, é mascarado por outros movimentos, ou seja, ele aparece somado aos movimentos gerados por atrito, como o movimento induzido pelo vento.

Para facilitar a escrita vamos escrever gradiente pressão abreviadamente *gp*. Suponha que a superfície oceânica comece a se inclinar por ação de um vento soprando em direção ao norte, no hemisfério sul. O transporte deste vento é noventa graus a esquerda da direção do mesmo, devido ao efeito de Coriolis, ou seja, para oeste. O vento começa a soprar e a água começa a empilhar a esquerda do vento, gerando um rebaixamento de nível a direita. Este empilhamento de água gera um desnível da superfície e um *gp* conforme mostra a figura 7.1. A força do *gp*, sendo contrária a este, atua em direção a leste, a água então começa a escoar em direção a leste por ação da força do gradiente. Quando a água começa a escoar a força de Coriolis começa a atuar desviando-a para a esquerda. Conforme o fluxo aumenta devido ao aumento do desnível a força de Coriolis também aumenta, pois é proporcional a velocidade. Quando o vento estabilizar o desnível da superfície deverá se manter e a força do *gp* permanecerá constante. Ao longo do tempo em que o *gp* está aumentando, até se estabilizar, a força de Coriolis desvia o fluxo cada vez mais, até que este fique na direção do vento. Neste ponto a força de Coriolis está oposta a força do *gp*, gerando um equilíbrio, e fluxo para de aumentar em intensidade e para de mudar de direção, conforme mostra a figura 7.2.

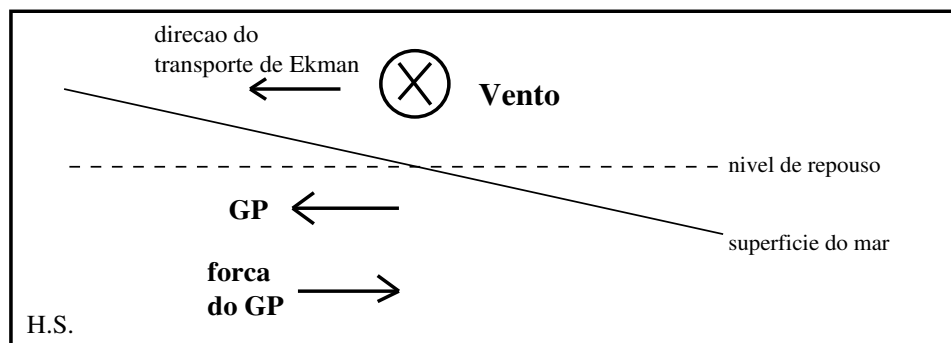


Figura 7.1: Vista Lateral do empilhamento de água e balanço de forças gerado por um vento de sul.

Este fluxo constante deve permanecer estável enquanto o *gp* não mudar, ou seja, enquanto o vento continuar mantendo este gradiente nesta intensidade. Se o vento aumentar ou diminuir em intensidade, a intensidade do *gp* vai mudar e um novo equilíbrio vai ser encontrado pelo fluxo. Se o vento parar o fluxo geostrófico vai continuar enquanto existir o desnível da superfície e depois se extinguirá.

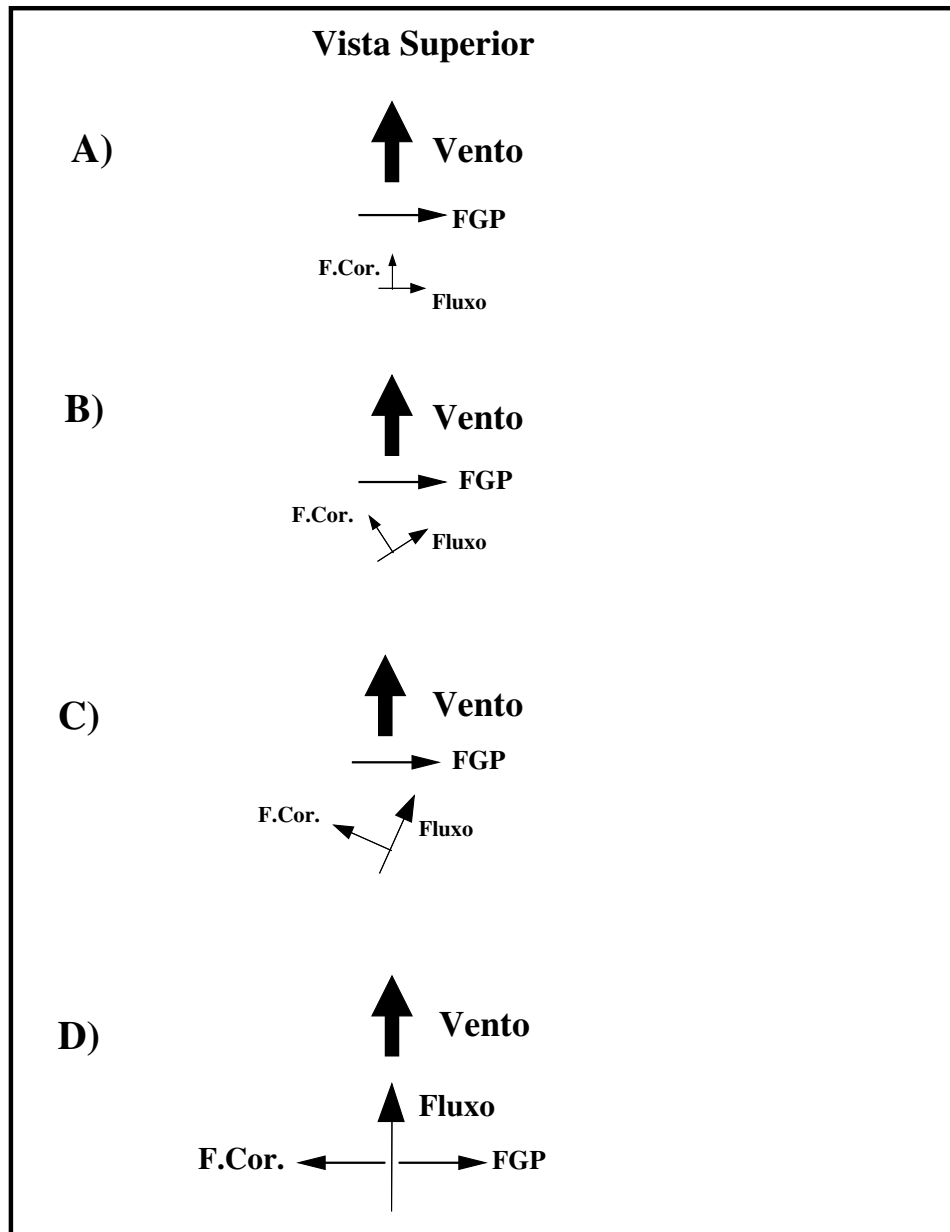


Figura 7.2: *Desenvolvimento do fluxo geostrófico associado ao vento de sul no Hemisfrio Sul. Vista Superior. FGP significa Força do Gradiente de Pressão e F.Cor força de Coriolis.*

## 7.2 Fluxo Inercial

Caso não exista inclinação da superfície livre do oceano as componentes horizontais do gradiente de pressão serão nulas<sup>2</sup>. Neste caso o movimento que teremos é um movimento cuja aceleração total é nula, pois os únicos termos que nos restam são os termos de aceleração local e aceleração de Coriolis, já que este é também um movimento sem fricção :

$$\frac{du}{dt} - f.v = 0 \quad (7.7)$$

$$\frac{dv}{dt} + f.u = 0 \quad (7.8)$$

Ou, em outras palavras, a aceleração local é fornecida pela aceleração de Coriolis. Este movimento deverá acontecer apenas na horizontal, ou seja, a velocidade vertical é nula,  $w = 0$ . Assim, ficamos com um sistema de equações diferenciais de primeira ordem e primeiro grau para  $u$  e  $v$ . No caso anterior (movimento geostrófico) tínhamos um sistemas de equações mais simples que não envolviam derivadas de  $u$  e  $v$ . Bastava conhecer o gradiente de pressão para estimar a velocidade<sup>3</sup>. Este nosso sistema de equações diferenciais é um sistema não linear, lembre-se que na parte advectiva da derivada da velocidade aparecem produtos de velocidade, a qual é nossa incógnita, e toda vez que temos produtos de incógnitas temos uma equação não linear. Apesar de equações não lineares não serem facilmente resolvíveis, estas em particular apresentam uma solução simples:

$$u = \vec{V}_h \text{sen}(ft) \quad (7.9)$$

$$v = \vec{V}_h \text{cos}(ft) \quad (7.10)$$

onde:  $\vec{V}_h = u^2 + v^2$  é o vetor velocidade horizontal. As equações 7.9 e 7.10 são as equações do movimento de uma partícula que descreve um círculo horizontal no sentido horário no hemisfério norte (onde  $f$  é positivo, dado que  $\theta$  é positivo).  $\vec{V}_h$  é constante em módulo e apresenta apenas alterações de direção conforme a partícula descreve o movimento circular, portanto a única aceleração presente é a aceleração centrípeta, cujo módulo é  $V_h^2/R$ . Sendo  $R$  o raio de curvatura do movimento. Portanto, analisando a equação vetorial do movimento (componentes 7.7 e 7.8 combinadas) ficamos com:

$$\frac{\vec{V}_h^2}{R} + f\vec{V}_h = 0 \quad (7.11)$$

---

<sup>2</sup>Lembre-se que estamos considerando o oceano homogêneo e sendo assim os gradientes de pressão causados por gradientes de densidade estão descartados.

<sup>3</sup>É exatamente o que vamos fazer a través do método dinâmico: estimar a velocidade a partir de um gradiente de pressão. Porém vamos utilizar apenas o gradiente de pressão gerado por gradientes de densidade.

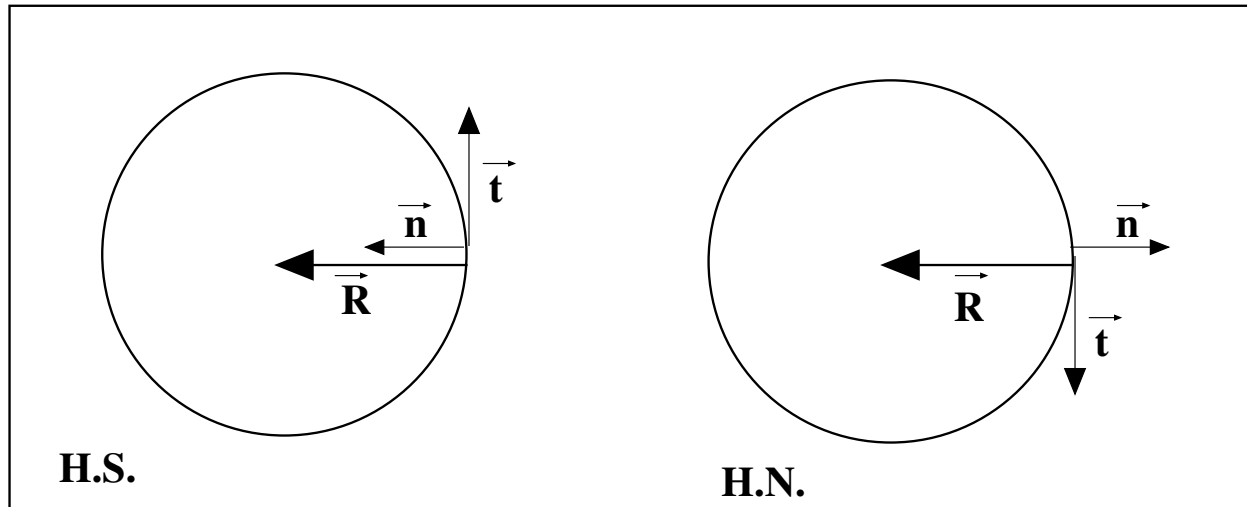


Figura 7.3: Sistema de coordenadas naturais para o fluxo inercial nos hemisférios norte e sul.

ou seja,

$$\vec{V}_h = -fR \quad (7.12)$$

e, conseqüentemente,

$$R = -\vec{V}_h/f \quad (7.13)$$

Para analisar este movimento adotamos um sistema de coordenadas mais adequado para o movimento circular, no qual os versores presentes são  $\vec{t}$  e  $\vec{n}$ . O versor  $\vec{t}$  aponta sempre na direção do movimento e o versor  $\vec{n}$  é normal a  $\vec{t}$  e sempre a esquerda deste. Neste sistema o movimento circular do fluxo inercial será sempre anticiclônico, pois de acordo com a equação 7.13, no hemisfério norte onde  $f$  é positivo, o raio  $R$  será negativo, i.e., apontando em direção contrária a  $\vec{n}$ , e no hemisfério sul  $R$  será positivo. Isto resulta em um movimento horário no hemisfério norte e anti-horário no hemisfério sul, conforme mostra a figura 7.3, portanto, sempre anticiclônico.

O período de rotação deste movimento será:

$$P_i = \frac{2\pi R}{\vec{V}_h} \quad (7.14)$$

E utilizando o conceito de  $R$ , equação 7.13, podemos reescrever 7.14 da seguinte forma:

$$P_i = \frac{2\pi}{f} \quad (7.15)$$



Tanto o raio do movimento como seu período variam de acordo com a latitude.

O movimento inercial ocorre nos oceanos quando uma forçante, como a força de atrito do vento por exemplo, atua durante um tempo e então para, deixando a água em movimento, por inércia.

### 7.3 A equação do Vento Térmico

As equações da geostrofia (eq. 7.4 e 7.5) e do balanço hidrostático (eq. 7.6) podem ser combinadas de modo a relacionar cisalhamentos verticais de velocidade com gradientes horizontais de densidade. Esse procedimento nos permite calcular velocidades geostróficas a partir de dados de densidade da água. Como esse método foi inicialmente aplicada para a atmosfera, e na atmosfera a densidade é uma consequência direta da temperatura, as equações que vamos deduzir a seguir ficaram conhecidas como equação do vento térmico, pois o vento geostrófico está diretamente relacionado com gradientes térmicos.

Repetimos as equações da geostrofia e do balanço hidrostático abaixo, porém em sua forma dimensional.

$$-fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (7.16)$$

$$+fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (7.17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (7.18)$$

Utilizamos a aproximação de Boussinesq, a qual nos permite substituir  $\rho$  por seu valor médio, exceto onde a densidade aparece multiplicada por  $g$ , ou seja, na equação do balanço hidrostático. Assim ficamos com:

$$-fv = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (7.19)$$

$$+fu = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (7.20)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (7.21)$$

onde  $\rho_o$  é a densidade média do oceano.

Derivamos a equação 7.19 em relação a  $z$  :

$$\frac{\partial(-fv)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (7.22)$$

e, desde que  $f$  e  $\rho_o$  não variam em  $z$ , podemos escrever:

$$-f \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (7.23)$$

Invertamos a ordem das derivadas no lado direito da nossa equação 7.23, assumindo que a propriedade  $p$  tem uma distribuição espacial tal que os cisalhamentos verticais são independentes de  $x$ .

$$-f \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (7.24)$$

Agora substituímos a equação 7.21 na equação 7.24 e ficamos com

$$-f \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho g}{\partial x} \quad (7.25)$$

Analogamente, podemos deduzir a outra componente do movimento se utilizarmos a componente  $y$  das equações geostróficas, e ficaremos com:

$$+f \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho g}{\partial y} \quad (7.26)$$

Essas equações relacionam cisalhamentos verticais de velocidade com gradientes horizontais de densidade, e nos permitem calcular velocidades geostróficas no oceano a partir de dados de salinidade e temperatura, como veremos a seguir. Elas foram de grande importância para o conhecimento da circulação dos oceanos quando os aparelhos para medição de velocidade ainda não tinham sido desenvolvidos.

## 7.4 O Método Dinâmico em Oceanografia

O método dinâmico baseia-se na equação do vento térmico para calcular velocidades geostróficas a partir de dados de densidade. No entanto, reescrevemos densidade como o inverso do volume específico ( $\rho = 1/\alpha$ , onde  $\alpha$  é o volume específico da água do mar). Assim ficamos com:

$$-f \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \alpha^{-1} g}{\partial x} \quad (7.27)$$

e

$$+f \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \alpha^{-1} g}{\partial y} \quad (7.28)$$

ou

$$-f \frac{\partial v}{\partial z} = -\rho_o g \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad (7.29)$$

e

$$+f \frac{\partial u}{\partial z} = -\rho_o g \frac{\partial \alpha}{\partial y} \quad (7.30)$$

desde que  $\rho_o/\rho \approx 1$ .

Como exemplo, utilizamos a situação teórica, em que duas estações oceanográficas foram realizadas no oceano ao longo de uma linha de mesma latitude, distantes entre si de 40 milhas nauticas, sendo que a estação B localiza-se a leste da estação A. Portanto as estações estão dispostas ao longo do eixo  $x$ , e assim calcularemos gradientes de  $\alpha$  em  $x$ , os quais estão relacionados com cisalhamentos verticais da componente  $y$  da velocidade. Como nosso eixo  $x$  orienta-se sempre de oeste para leste, uma deriva de  $\alpha$  em  $x$  deve ser feita como:  $(\alpha_B - \alpha_A)/\Delta x$ . Utilizaremos para tal a equação 7.29.

Os dados de temperatura e salinidade foram coletados em profundidades padrões, e as densidades foram computadas pela equação simplificada de estado da água do mar, e são apresentadas na tabela 7.1. Os perfis de densidade encontram-se plotados na figura 7.4.

Para o cálculo da velocidade em cada um dos extratos da coluna d'água, aqueles que aparecem na tabela 7.1, a equação 7.29 é integrada na vertical:

$$\int_{z_1}^{z_2} (-f \frac{\partial v}{\partial z}) dz = - \int_{z_1}^{z_2} (\rho_o g \frac{\partial \alpha}{\partial x}) dz \quad (7.31)$$

No lado direito dessa equação assumimos que a integral da derivada pode ser substituída pela derivada da integral. Isso pode ser feito desde que as derivadas dos limites de integração sejam desprezíveis pois temos de observar o teorema de Leibnitz. E desde que  $f$  não varia na vertical:

$$-f(v_{z_2} - v_{z_1}) = -\rho_o g \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{z_1}^{z_2} \alpha dz \right) \quad (7.32)$$

Prof. (m)	$\rho_B$	$\rho_A$	$\alpha_B$	$\alpha_A$
0	1024.9845	1025.1234	9.756245e-04	9.756245e-04
10	1025.3317	1025.5345	9.752941e-04	9.752941e-04
20	1025.6489	1025.8476	9.749925e-04	9.749925e-04
30	1025.3838	1025.9876	9.752446e-04	9.752446e-04
50	1026.3254	1026.5976	9.743498e-04	9.743498e-04
75	1026.9255	1027.1243	9.737805e-04	9.737805e-04
100	1028.3370	1028.3523	9.724438e-04	9.724438e-04
200	1028.2410	1028.9878	9.725346e-04	9.725346e-04
300	1029.1347	1029.5798	9.716901e-04	9.716901e-04
500	1029.6469	1030.5787	9.712067e-04	9.712067e-04
750	1031.8796	1032.3456	9.691053e-04	9.691053e-04
1000	1035.3679	1035.7865	9.658403e-04	9.658403e-04

Tabela 7.1: Densidade e volume específico nas estações A e B, por extrato.

ou

$$f(v_{z2} - v_{z1}) = \frac{1000 * 10}{\Delta x} (\bar{\alpha}_B - \bar{\alpha}_A) \Delta h \quad (7.33)$$

onde

$\bar{\alpha}_B$  é o volume específico médio do extrato limitado pelas prof.  $z1$  e  $z2$ , na estação B;  
 $\bar{\alpha}_A$  é o volume específico médio do extrato limitado pelas prof.  $z1$  e  $z2$ , na estação A;  
 $\Delta x$  é a distancia entre as duas estações em metros;  $\Delta h$  é a espessura do extrato.

$\rho_o$  foi considerado como  $1000 \text{ kg/m}^3$  e  $g$  como  $10 \text{ m/s}^2$ .

O método só nos permite calcular a velocidade relativa entre dois extratos, portanto precisamos conhecer a velocidade em um determinado nível para que possamos calcular a velocidade no nível logo acima. Assumiremos que o nível de 1000 m é um nível de não movimento, ou seja, um nível onde a velocidade é nula. Assim faremos nossa integração de baixo para cima, e o nosso primeiro extrato será o extrato entre  $z1 = -1000$  m e  $z2 = -750$  m. Ficamos então com:

$$v_{750} - v_{1000} = \frac{10000}{-7.27 \times 10^{-5} * 74000} (9.674701 \times 10^{-4} - 9.670562 \times 10^{-4}) * 250 \quad (7.34)$$

onde:

$-7.25 \times 10^{-5}$  é o valor de  $f$  na latitude de 30S;

74.000 é a distância entre as estações convertida em metros;

250 é a espessura do extrato em metros, ou seja  $\Delta h = z2 - z1 = -750 - (-1000) = 250$ ;

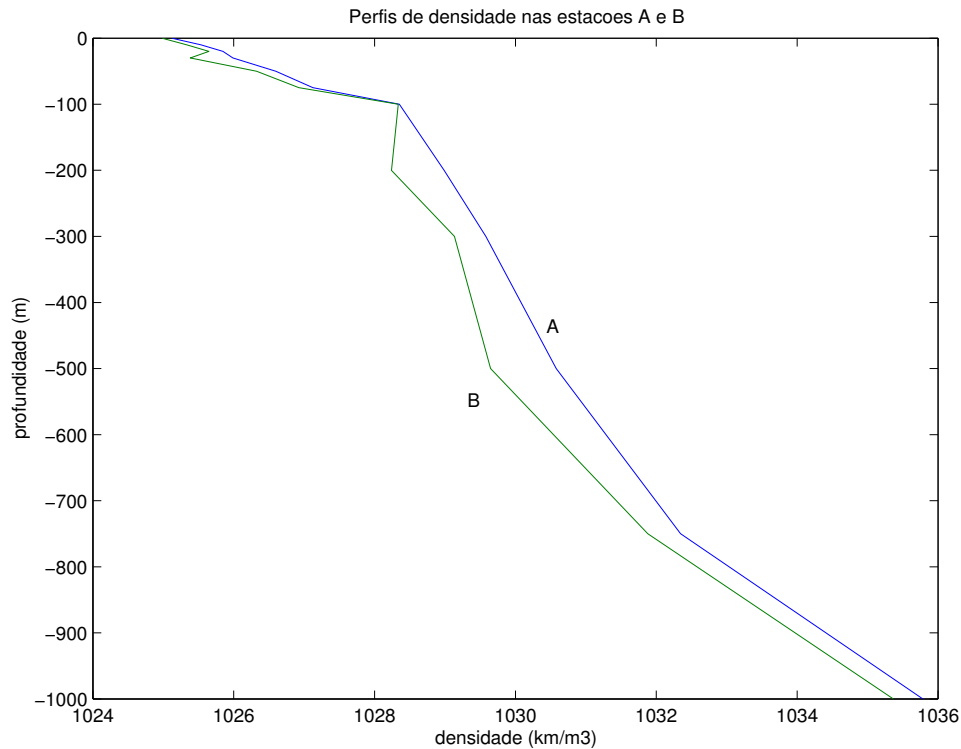


Figura 7.4: Perfis verticais de densidade nas estações A e B.

e os valores entre parenteses são os volumes específicos médios do extrato nas estações A e B. Assim ficamos com:

$$v_{750} - 0 = -1858.2 * (4.138 \times 10^{-7}) * 250 = -0.1922 \quad (7.35)$$

ou  $v_{750} = -0.1922$

Observando as unidades de cada variável na equação 7.34 veremos que o resultado é  $m/s$ .

$$v_{750} = \frac{kg.m^{-3} * m.s^{-2} * m^3.kg^{-1} * m}{s^{-1} * m} = \frac{m}{s}$$

onde  $kg.m^{-3}$  é a unidade de  $\rho_o$ ,  $m.s^{-2}$  é a unidade de  $g$ ,  $m^3.kg^{-1}$  é a unidade de  $\alpha$ ,  $m$  é a unidade de  $\Delta x$  e  $\Delta h$ , e  $s^{-1}$  é a unidade de  $f$ .

Esse primeiro extrato está centrado em 875 metros. O cálculo para o resto do extratos é apresentado na tabela 7.2.

Prof. média	$\bar{\alpha}_B$	$\bar{\alpha}_A$	$\bar{\alpha}_B - \bar{\alpha}_A$	$\Delta h$	V (m/s)
5	9.754593e-04	9.752968e-04	1.625081e-07	10	-0.954849
15	9.751433e-04	9.749525e-04	1.908511e-07	10	-0.951829
25	9.751186e-04	9.747372e-04	3.814003e-07	10	-0.948283
40	9.747972e-04	9.743811e-04	4.161327e-07	20	-0.941195
62.5	9.740652e-04	9.738418e-04	2.234120e-07	25	-0.925730
87.5	9.731122e-04	9.730107e-04	1.014662e-07	25	-0.915351
150	9.724892e-04	9.721291e-04	3.601292e-07	100	-0.910637
250	9.721124e-04	9.715494e-04	5.629426e-07	100	-0.843717
400	9.714484e-04	9.707993e-04	6.491013e-07	200	-0.739108
625	9.701560e-04	9.694982e-04	6.577903e-07	250	-0.497871
875	9.674728e-04	9.670589e-04	4.139132e-07	250	-0.192288

Tabela 7.2: Volume específico médio de cada extrato, diferença de volumes específicos médios entre as duas estações e velocidades de cada extrato.

# Capítulo 8

## Vorticidade

A vorticidade expressa a tendência em haver rotação no fluido. No entanto, esta tendência pode ser induzida por diversas causas, como veremos neste capítulo. Basicamente existe uma vorticidade induzida no fluido pelo próprio campo de velocidade do fluido, que é o que chamamos de *vorticidade relativa* ( $\zeta_R$ ) e uma vorticidade induzida pela rotação da Terra, que é o que chamamos de *vorticidade planetária* ( $\zeta_P$ ).

### 8.1 Vorticidade Relativa

Os cisalhamentos de velocidade existentes no campo de correntes induzem vorticidade na água. Por definição esta vorticidade é expressa através do vetor  $\zeta_R$ :

$$\zeta_R = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \vec{k} \quad (8.1)$$

$\zeta_R$  é uma grandeza vetorial (pois resulta do produto vetorial entre dois vetores) imaginária, cujo módulo expressa a tendência que o campo de corrente tem para apresentar rotação, e cuja direção é normal ao plano em que acontece a rotação.

Analisemos uma situação simples para facilitar o entendimento. Imaginem uma situação em que o movimento é horizontal, ou seja a componente  $w$  da velocidade é nula, e que não apresenta cisalhamentos verticais de velocidade, isto é  $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = 0$ . Neste caso só nos resta a componente vertical de  $\zeta_R$ :

$$\zeta_R = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \vec{k} \quad (8.2)$$

Dado que o movimento é horizontal a vorticidade será um vetor vertical, normal ao plano do movimento. Dependendo dos cisalhamentos horizontais de  $u$  e  $v$  teremos vorticidade ou

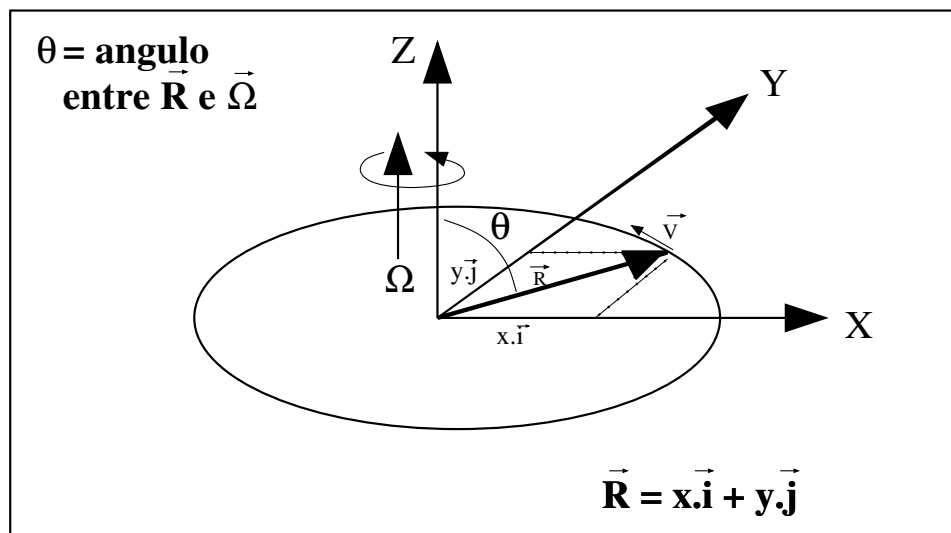


Figura 8.1: Rotação de um disco rígido

não. Se a componente  $v$  da velocidade apresentar cisalhamento na direção  $x$  na mesma intensidade que o cisalhamento da componente  $u$  na direção  $y$  a vorticidade será nula.

## 8.2 Vorticidade Planetária

A vorticidade planetária está intimamente relacionada com a velocidade angular da Terra. Todo movimento que ocorre na superfície da Terra é induzido à rotação por causa do movimento rotacional da Terra. Para simplificar vamos analisar a rotação de um corpo rígido, como o disco da figura 8.1. Este disco roda em torno de um eixo de rotação que é normal ao plano do disco. Imaginem um ponto  $P$  na periferia do disco que roda no sentido anti-horário. Este ponto descreve um movimento circular com velocidade angular constante  $\Omega$  e raio  $R$ . Se ajustarmos um sistema de coordenadas  $xyz$  de modo que a origem seja no ponto central do disco, com o eixo  $z$  normal ao disco, apontando para cima e os eixos  $x$  e  $y$  no plano do disco, apontando para leste e norte, respectivamente,  $R$  será um vetor que vai da origem até o ponto  $P$ , cujas componentes nos eixos  $x$  e  $y$  são respectivamente  $x$  e  $y$ .

A velocidade linear ( $\vec{V}$ ) com que o ponto  $P$  descreve o movimento circular é tangencial ao disco e normal ao vetor  $R$ .  $\vec{V}$  é descrita pelo produto vetorial:

$$\vec{V} = \Omega \times \vec{R} \quad (8.3)$$

ou seja,

$$\vec{V} = -\Omega y.\vec{i} + \Omega x.\vec{j} \quad (8.4)$$

pois  $\Omega$  é um vetor que tem apenas a componente vertical, dado que  $\Omega$  aponta na direção



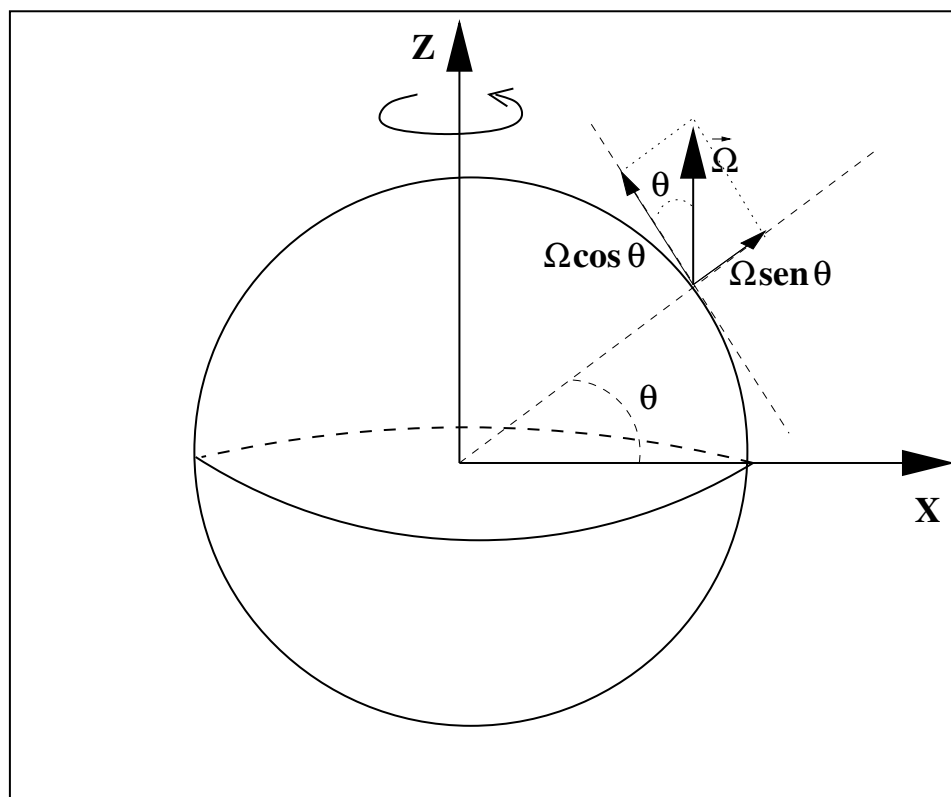


Figura 8.2: Vetor velocidade angular da Terra e suas componentes

do eixo  $z$  e  $\vec{R}$  tem apenas as componentes  $x$  e  $y$ . Ao calcularmos a vorticidade planetária aplicaremos  $\nabla$  ao vetor  $\vec{V}$  da equação 8.4:

$$\zeta_P = \nabla \times \vec{V} = \nabla \times (-\Omega y \cdot \vec{i} + \Omega x \cdot \vec{j}) \quad (8.5)$$

cujo resultado é:

$$\zeta_P = \Omega \frac{\partial x}{\partial x} + \Omega \frac{\partial y}{\partial y} = 2\Omega \quad (8.6)$$

dado que  $\Omega$  é constante e  $x$  e  $y$  não variam na direção  $z$ .

Esquecendo o corpo sólido e analisando um movimento que esteja ocorrendo na superfície da Terra, orientaremos o nosso sistema de coordenadas local (não inercial) de forma que o eixo  $z$  aponta sempre para cima, em direção ao espaço e normal a superfície da Terra, o eixo  $x$  aponta para leste e o eixo  $y$  para o norte. Como o vetor  $\Omega$  é sempre paralelo ao eixo de rotação da Terra, esse terá duas componentes, uma no eixo  $z$  e outra no eixo  $y$ , veja a figura 8.2. Portanto o vetor vorticidade planetária,  $\zeta_P$ , também tem duas componentes, uma no eixo  $z$  que é:  $\zeta_P \text{sen} \theta$  e outra no eixo  $y$  que é:  $\zeta_P \text{cos} \theta$ .

Lembrando as definições de  $f$  e  $\ddot{f}$  veremos que  $f$  é a componente da vorticidade planetária no eixo  $z$  e  $\ddot{f}$  no eixo  $y$ . Portanto, a vorticidade planetária tem módulo igual a duas vezes a

velocidade angular de rotação da Terra ( $\Omega$ ) conforme foi demonstrado para o disco em rotação e tem componentes que equivalem aos parâmetros de coriolis. Como nós desprezamos  $\dot{f}$ , o parâmetro  $f$  representará a vorticidade planetária.

A razão entre vorticidade relativa e vorticidade planetária nos dá o já conhecido número de Rossby:

$$R_b = \frac{\zeta_R}{f} = \frac{U/L}{f} = \frac{U}{fL} \quad (8.7)$$

A soma das vorticidades relativa e planetária é o que conhecemos como *vorticidade absoluta* ( $\zeta_a$ )

$$\zeta_a = \zeta_R + f \quad (8.8)$$

### 8.3 Equação da Vorticidade

Para obter uma equação diferencial para  $\zeta_R$  basta aplicar (vetorialmente) o operador  $\nabla$  à equação do movimento em forma vetorial:

$$\nabla \times \left( \frac{d\vec{V}}{dt} + 2\Omega \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V} \right) \quad (8.9)$$

O resultado desta operação é:

$$\frac{d\vec{\zeta}_R}{dt} = +(\vec{\zeta}_a \bullet \nabla) \vec{V} - \vec{\zeta}_a \nabla \bullet \vec{V} - (\vec{V} \bullet \nabla) 2\Omega + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nu \nabla^2 \vec{\zeta}_R \quad (8.10)$$

A derivação completa dessa equação encontra-se no apêndice B desta apostila. Basicamente, ela nos diz que variações de vorticidade ( $d\vec{\zeta}_R/dt$ ) podem ser causadas por 5 processos. Esses processos são:

1.  $\vec{\zeta}_a \bullet \nabla \vec{V}$  = inclinação ou torcimento do tubo de vortice;
2.  $\vec{\zeta}_a \nabla \bullet \vec{V}$  = estiramento/compressão do tubo de vortice;
3.  $(\vec{V} \bullet \nabla) 2\Omega$  = advecção de gradientes de vorticidade planetária;
4.  $\frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2}$  = baroclinicidade;
5.  $\nu \nabla^2 \vec{\zeta}_R$  = atrito.

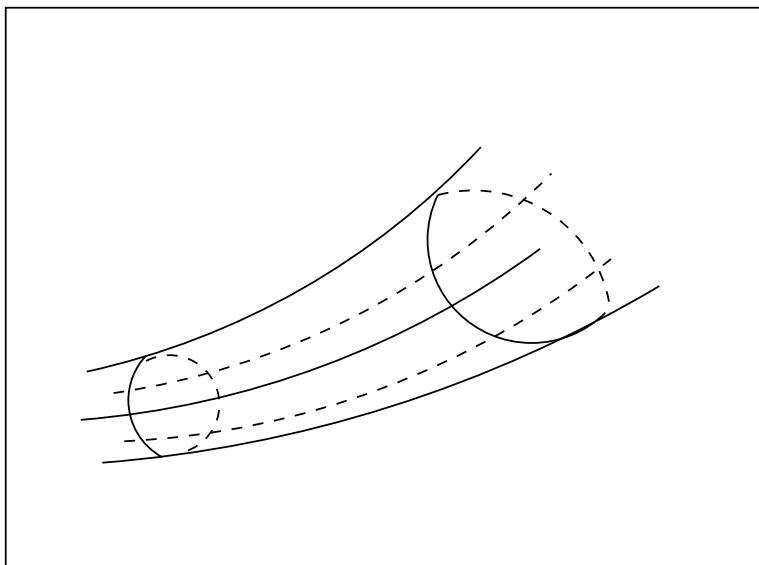


Figura 8.3: *Tubo de vortice, formado por diversos filamentos de vortice.*

Para entender-mos esses processos é necessário introduzir o conceito de filamentos de vortice e tubo de vortice. Filamentos de vortice são linhas imaginárias que são tangentes aos vetores vorticidade. Um tubo de vortice é formado por vários filamentos de vortice. O fluido geofísico se comporta de maneira tal que filamentos de vortice não se cruzam, e portanto o tubo de vortice apresenta paredes bem definidas. Veja a figura 8.3. Esses tubos imaginários de vortices se propagam embudados no fluido e sofrem alterações de forma e tamanho conforme o fluido altera sua tendência a rotação.

Os dois primeiros processos que causam variações de vorticidade (inclinação e compressão do tubo de vortice) são mais facilmente entendidos se analisarmos uma situação simplificada, na qual o movimento é essencialmente horizontal, ou seja, a componente  $w$  da velocidade é desprezível. Nesse caso, o vetor  $\zeta_R$  tem apenas a componente vertical, pois o mesmo é normal ao plano em que acontece o movimento. Nessas situações é útil adotarmos a aproximação do Plano  $\beta$ , a qual já foi implicitamente adotada ao escolhermos coordenadas cartesianas e ao desprezarmos  $\dot{f}$ . Nessa aproximação, assumimos que o movimento acontece sobre um plano que é tangente à superfície da Terra na latitude  $\theta_0$ . Nesse plano, apenas a componente vertical da vorticidade planetária ( $f = 2\Omega \sin\theta$ ) é importante. A variação latitudinal da vorticidade planetária é o parâmetro  $\beta$ ,  $\beta = \frac{df}{d\theta}$ , ou  $\frac{df}{dy}$ , já que adotamos coordenadas cartesianas. Assim, o vetor vorticidade absoluta também apresenta apenas a componente vertical, e os dois primeiros termos do lado direito da nossa equação (eq. 8.10) podem ser simplificados, conforme demonstrado abaixo.

Termo 1:

$$\vec{\zeta}_a \cdot \nabla \vec{V} = \zeta_{a_x} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \zeta_{a_y} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + \zeta_{a_z} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

$$\vec{\zeta}_a \bullet \nabla \vec{V} = \zeta_{a_z} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = \zeta_{a_z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \zeta_{a_z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \zeta_{a_z} \cdot \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\vec{\zeta}_a \bullet \nabla \vec{V} = \zeta_{a_z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \zeta_{a_z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \quad (8.11)$$

Termo 2:

$$\vec{\zeta}_a \nabla \bullet \vec{V} = (\zeta_{a_x} + \zeta_{a_y} + \zeta_{a_z}) \cdot (\nabla \bullet \vec{V})$$

$$\vec{\zeta}_a \nabla \bullet \vec{V} = \zeta_{a_z} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\zeta}_a \nabla \bullet \vec{V} = \zeta_{a_z} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (8.12)$$

A equação 8.11 nos diz que o processo de inclinação do tubo de vortice ocorre quando temos cisalhamentos verticais das velocidades horizontais. Esse processo pode ocorrer, por exemplo, quando uma coluna d'água que se desloca em águas profundas se aproxima da plataforma continental, e sofre o atrito com o fundo, deformando-se. A equação 8.12 nos diz que o processo de compressão/estiramento do tubo de vortice ocorre quando o fluxo apresenta divergência ou convergência horizontal. Em caso de divergência, o tubo de vortice aumenta de diâmetro e diminui de altura, os filamentos de vortice se afastam, e a vorticidade relativa diminui em módulo. Em caso de convergência temos estiramento do tubo de vortice, os filamentos se aproximam, e a vorticidade relativa aumenta. Um exemplo de como um campo de velocidade divergente gera vorticidade é apresentado na figura 8.4.

O termo 3,  $(\vec{V} \bullet \nabla)2\Omega$ , no caso da aproximação do plano  $\beta$ , resume-se  $v \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$ , pois  $2\Omega$  é aproximado para  $f$ , e  $f$  varia apenas em  $y$ , assim as derivadas em  $x$  e  $z$  de  $f$  são nulas. A advecção de uma coluna de fluido ao longo de um meridiano, faz com que essa viaje para latitudes onde a vorticidade planetária é diferente daquela de sua latitude de origem, e isso induz vorticidade relativa na coluna.

O termo 4 do lado direito da equação 8.10 expressa um produto vetorial entre os gradientes dos campos de densidade e pressão. Se esse produto é nulo isso significa que os dois gradientes são paralelos, ou seja, os campos de densidade e pressão são paralelos, e nesse caso temos um fluido barotrópico. Lembre-se que por definição o produto escalar entre dois vetores é dado pelo módulo de um, vezes o módulo do outro, vezes o seno do ângulo entre eles. Se

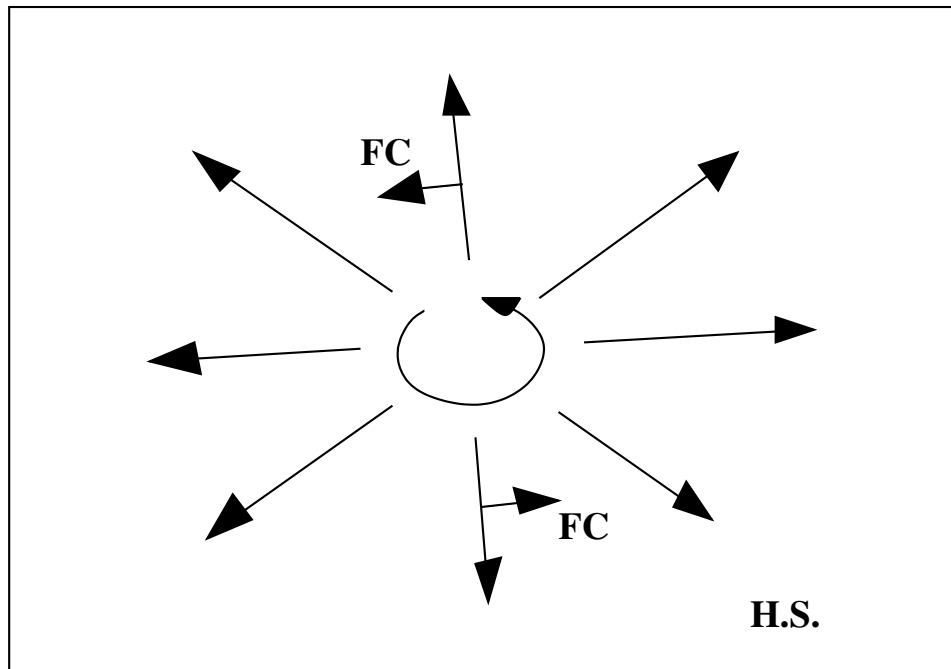


Figura 8.4: *Circulação divergente e ação da força de Coriolis.*

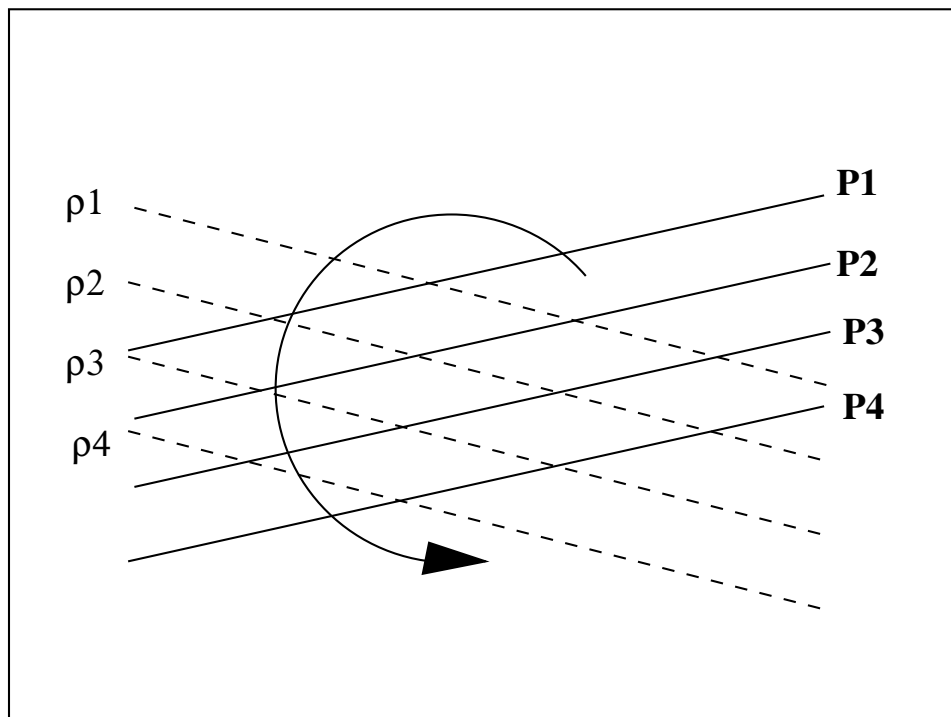


Figura 8.5: *Campo de densidade se ajustando ao campo de pressão*

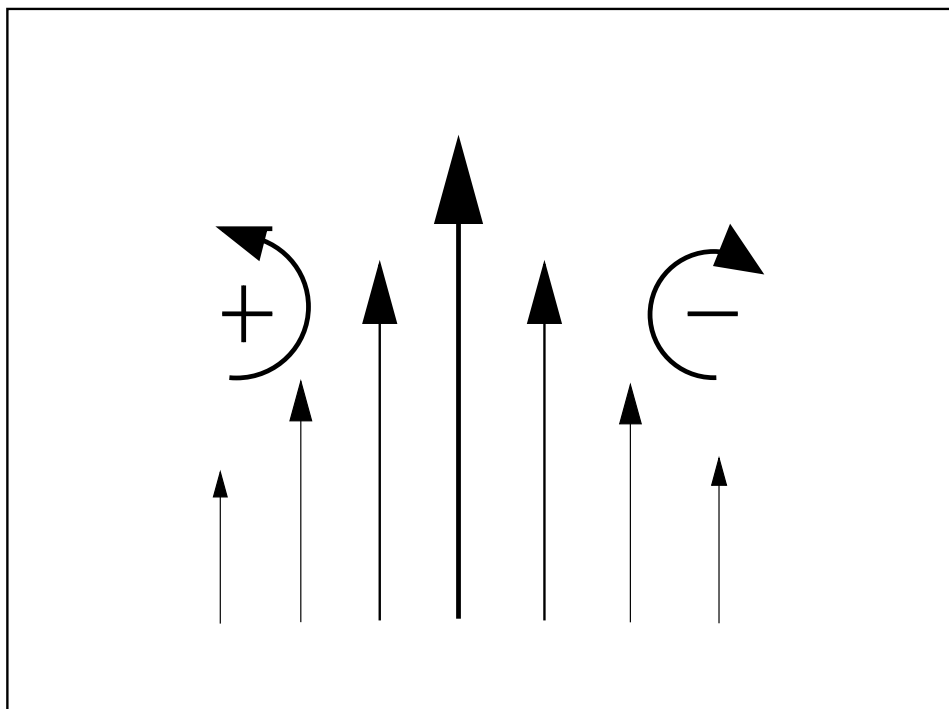


Figura 8.6: *Campo de corrente cisalhado e as tendências rotacionais.*

os mesmos são paralelos, então o ângulo é 0 ou 180, e o seno é 0. Caso esse produto não seja nulo, então os campos não são paralelos, como na situação apresentada na figura 8.5, e o fluido é dito baroclínico. Nesse último caso, o campo de densidade tende a se ajustar ao campo de pressão, gerando vorticidade conforme mostra a figura.

Finalmente, temos o efeito do atrito (termo 5). O atrito interno do fluido pode gerar cisalhamentos do fluido, de modo que cada parcela de fluido sofre tensões diferentes em cada um de seus lados, e isso gera uma tendência a rotação, conforme mostra a figura 8.6.

## 8.4 Conservação de vorticidade potencial

Para determinados movimentos, como movimentos de meso a larga escala que ocorrem em oceano aberto, podemos considerar o fluido homogêneo ( $\rho$  constante) e desconsiderar o efeito do atrito, pois nesta região os contornos estão muito longe para que possam influenciar. Nestas condições o movimento será essencialmente horizontal e barotrópico, ou seja,  $w$  é muito pequeno e as velocidades horizontais não apresentam cisalhamentos verticais ( $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = 0$ ). Esta é uma situação em que os efeitos da estrutura termohalina, compressibilidade e forças de fricção são desprezados e a coluna d'água está em equilíbrio hidrostático. Resta-nos portanto apenas a componente vertical de  $\zeta_R$ , pois sendo o movimento quase que apenas horizontal o vetor vorticidade relativa deve ser vertical, pois o mesmo é normal ao plano em que acontece o movimento. Assim o termo de inclinação do tubo de vortice, o termo baroclínico e o termo de atrito podem ser desprezados, e a nossa equação da vorticidade torna-se:

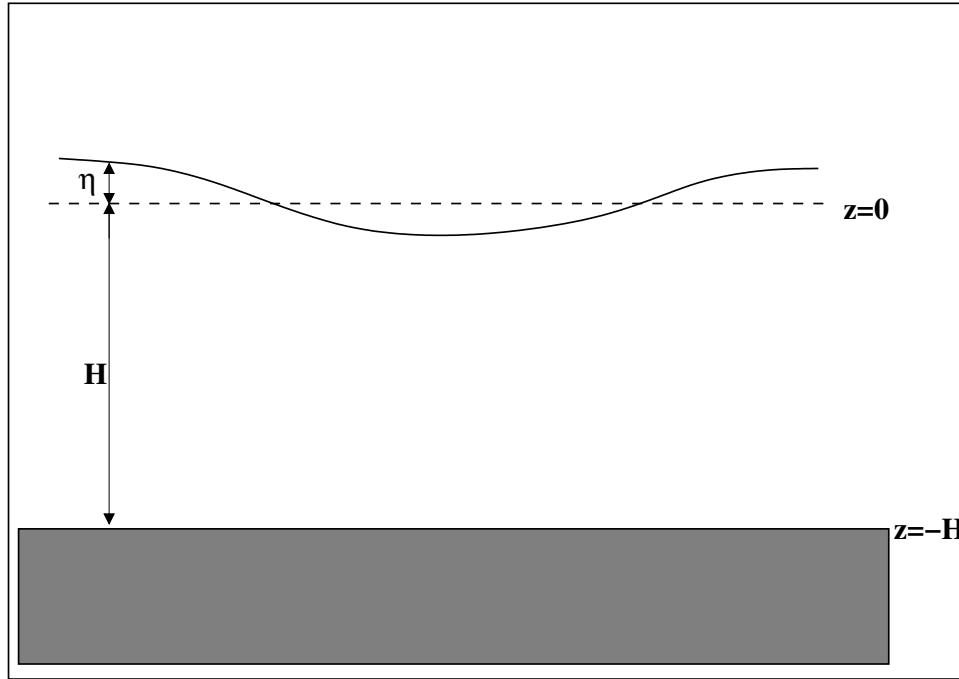


Figura 8.7: Vista lateral da coluna d'água no modelo de águas rasas.

$$\frac{d\zeta_{Rz}}{dt} = -(\zeta_{Rz} + f)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - v\beta \quad (8.13)$$

desde que utilizemos a aproximação do plano  $\beta$ , e  $2\Omega$  seja aproximado para  $f$ . Nessa equação,  $\beta = \frac{df}{dy}$ .

Para estes movimentos barotrópicos de larga escala trabalhamos com a equação da continuidade integrada verticalmente. Dizemos que a coluna d'água é dividida em uma porção  $H$  de altura constante, que é o nível de repouso, e mais as oscilações em torno do nível de repouso ( $\eta$ ), que são as ondas (figura 8.7), e integramos a equação desde  $z = -H$  até  $z = \eta$ .

$$\int_{-H}^{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dz = - \int_{-H}^{\eta} \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) dz \quad (8.14)$$

como  $u$  e  $v$  não variam em  $z$ , o resultado é:

$$\frac{\partial(H + \eta)u}{\partial x} + \frac{\partial(H + \eta)v}{\partial y} = -w_{\eta} + w_{-H} \quad (8.15)$$

considerando o fundo plano  $w_{-H}$  será nulo, no entanto, na superfície a velocidade vertical  $w$  é causada pelas oscilações  $\eta$ . Portanto podemos substituir  $w_{\eta}$  por  $\partial\eta/\partial t$ . Reescrevendo a equação 8.15 teremos:

$$(H + \eta) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -u \frac{\partial H + \eta}{\partial x} - v \frac{\partial H + \eta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (8.16)$$

$$(H + \eta) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{d(H + \eta)}{dt} \quad (8.17)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{1}{(H + \eta)} \frac{d(H + \eta)}{dt} = (H + \eta) \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H + \eta} \right) \quad (8.18)$$

Portanto na equação 8.13 substituímos o termo  $(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})$  por  $(H + \eta) \frac{d}{dt} (\frac{1}{H + \eta})$

$$\frac{d\zeta_{Rz}}{dt} = -(\zeta_{Rz} + f) \left( (H + \eta) \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H + \eta} \right) \right) - v\beta \quad (8.19)$$

Lembrando que  $\beta$  é  $\partial f / \partial y$ , a parte advectiva da derivada total de  $f$ , e que este termo é única parte não nula de  $df/dt$  pois  $f$  não varia em  $x$ ,  $z$  e  $t$ , podemos escrever  $v\beta$  como  $df/dt$ , ou seja:

$$\frac{d\zeta_{Rz}}{dt} = -(\zeta_{Rz} + f) \left( (H + \eta) \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H + \eta} \right) \right) - \frac{df}{dt} \quad (8.20)$$

$$\frac{d\zeta_{Rz}}{dt} + \frac{df}{dt} = -(\zeta_{Rz} + f) \left( (H + \eta) \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H + \eta} \right) \right) \quad (8.21)$$

ou seja;

$$\frac{d\zeta_a}{dt} + \zeta_a (H + \eta) \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H + \eta} \right) = 0 \quad (8.22)$$

$$\frac{1}{H + \eta} \frac{d\zeta_a}{dt} + \zeta_a \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H + \eta} \right) = 0 \quad (8.23)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\zeta_a}{H + \eta} \right) = 0 \quad (8.24)$$

Esta última equação nos diz que a quantidade  $\frac{\zeta_a}{H + \eta}$  deve se conservar, pois se sua derivada é nula, isto significa que a mesma é constante.

Esta quantidade é o que conhecemos por vorticidade potencial  $\Pi$ , como se o fluido possuísse um reservatório de vorticidade, mesmo que este não esteja em rotação. Analisando esta situação veremos que, para estes movimentos de larga escala, o fluido se desloca de modo a conservar seu potencial de rotação. Toda vez que variar  $H$ ,  $\zeta_R$  ou  $f$ , isto acontecerá de



modo que  $\zeta_P$  permaneça constante. Por exemplo, quando uma coluna d'água se desloca, ao longo de um paralelo de latitude ( $f$  permanece constante), para uma região de menor profundidade, ela deve perder vorticidade relativa para compensar a diminuição de  $H$  e manter  $\Pi$  constante. por outro lado, se esta coluna se desloca ao longo de um meridiano, do equador para o polo, sobre uma região de profundidade constante, ela deverá perder vorticidade relativa para compensar o aumento de vorticidade planetária.

# Capítulo 9

## Correntes Oceânicas com Fricção

### 9.1 Circulação Dirigida pelo Vento

Desde a muito tempo o homem já sabe que a circulação superficial dos oceanos, em larga escala, ocorre na forma de grandes giros. Porém não se sabia que a mesma é gerada pelos ventos. No século XVI, os grandes navegadores espanhóis e portugueses já sabiam da existência dos giros anticiclônicos nos oceanos Atlântico Norte e Atlântico Sul. Inicialmente atribuiu-se esta circulação ao aquecimento diferenciado entre equador e polos (Croll, 1875), mas de acordo com as primeiras estimativas a circulação gerada pelos gradientes termohalinos deveria apresentar valores bem menores e variações mais lentas. Em seguida esta circulação foi associada aos ventos. No entanto, Zöppritz, em 1878, demonstrou quantitativamente que a transferência de momento do vento para os oceanos era um processo muito lento para ser levado em consideração. Mas seus cálculos estavam errados, pois Zöppritz usou o coeficiente molecular de viscosidade, e nós sabemos que a transferência de momento na água ocorre principalmente através de movimentos turbulentos. Efeito este que foi parametrizado na forma de um coeficiente de viscosidade turbulenta.

Hoje em dia sabe-se que a circulação de larga escala dos oceanos é gerada tanto pelos gradientes de densidade como pela transferência e momento a partir da atmosfera. No entanto, na capa superficial dos oceanos, o vento é o principal fator gerador da circulação. A circulação termohalina, por sua vez, ocorre em toda a coluna d'água, porém em escala de tempo bem diferente.

Por volta de 1898 Nansen explicou qualitativamente por que as correntes oceânicas dirigidas pelo vento não ocorrem na mesma direção deste, porém defletida a esquerda no hemisfério sul e a direita no hemisfério norte. Nansen descobriu este efeito observando o deslocamento de icebergs nas regiões polares.

Em 1902, Ekman explicou quantitativamente esta deflexão do movimento, e associou a mesma à força de Coriolis. Ekman colocou a equação do movimento na forma que explicaria o transporte gerado pelo vento.

Em 1942, Sverdrup desenvolveu o primeiro modelo, com base na teoria de Ekman, que explicaria a circulação dos oceanos na forma de grandes giros.

Em 1948, Stommel explicou, também com base na teoria de Ekman, o fato das correntes oceânicas (parte dos giros de larga escala) serem mais intensa no lado oeste dos oceanos: Corrente do Brasil, Corrente do Golfo, Corrente de Kuroshio.

Em 1950, Munk, com base na teoria destes outros autores, obteve explicações analíticas que descrevem quantitativamente os principais aspectos da circulação oceânica dirigida pelo vento, em termos do campo real de ventos.

### 9.1.1 A Teoria de Ekman

Já estudamos (capítulo 7) movimentos com pequenos números de Rossby e Ekman, ou seja, movimentos sem aceleração e atrito. E vimos que estes movimentos deveriam ocorrer no oceano invíscido, fora das camadas de Ekman, e quando as forças que estivessem causando o movimento se equilibrassem, gerando um fluxo estacionário. O principal movimento nestas condições é a geostrofia, em presença do equilíbrio hidrostático. Agora passamos a considerar movimentos que, apesar de apresentarem pequeno número de Rossby, não apresentam número de Ekman desprezível, ou seja, movimentos estacionários que ocorrem em presença do atrito. Este tipo de movimento ocorre nas camadas de Ekman. Como o fluxo é estacionário, nosso estudo se limita ao fluxo gerado a partir do momento que as forças que atuam no fluido entram em equilíbrio. Para um dado campo de vento (constante) e dados campos de pressão e massa deve existir um fluxo (estacionário) que é resultante do equilíbrio de 3 forças: *força de Coriolis*, *força do Gradiente de Pressão* e *força de Atrito*. Estando estas forças em equilíbrio a resultante deve ser nula, portanto o movimento causado deve apresentar aceleração nula, ou pelo menos esta deve ser tão pequena que pode ser desprezada. Portanto os termos referentes à aceleração nas equações do movimento não serão incluídos. Nestas condições as equações do movimento utilizadas para o estudo de Ekman são:

componentes horizontais:

$$-fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (9.1)$$

$$+fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (9.2)$$

componente vertical:

$$g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \quad (9.3)$$

e a equação da continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (9.4)$$

Continuamos considerando o oceano incompressível e homogêneo, portanto os gradientes de pressão a que nos referimos são aqueles gerados por inclinações da superfície (componente barotrópica). Esta situação difere da geostrofia por que, com adição dos termos de atrito, as forças do gradiente de pressão e Coriolis deixam de ser diretamente opostas, Um novo equilíbrio é atingido, diferente do equilíbrio geostrofico.

**“É importante notar que: Matematicamente os modelos são feitos, para esta ou aquela situação, não considerando os processos que não nos interessam e desprezando os respectivos termos nas equações. Porém na natureza os processos simplesmente ocorrem e não podem ser desprezados ou eliminados. Então, ao realizarmos um cálculo com base nas equações que não incluem determinados termos, os quais representam matematicamente determinados processos, estamos fazendo um cálculo limitado, i.e., limitado às situações e/ou regiões em que estes fenômenos não são significativos. Todos os modelos são limitados enuncia representam 100 % dos fenômenos. Cabe ao pesquisador saber usá-los adequadamente, ou seja, saber quando e onde usar um modelo baseados nas equações da geostrofia, ou equações de Ekman, nas equações com coordenadas esféricas ou cartesianas, etc.. ”**

A teoria de Ekman foi desenvolvida para explicar um movimento de larga escala que ocorre no meio do oceano, longe das margens continentais, uma região onde os contornos laterais estão suficientemente longe para que seus efeitos possam ser desprezados. Vamos considerar o movimento de uma massa homogênea de fluido limitada inferiormente por um fundo plano e horizontal, e que apresenta-se em rotação com velocidade angular constante. Sob tais condições podemos considerar que  $\rho$ , a densidade do oceano, é constante, e que o movimento é essencialmente horizontal, pois estando os contornos laterais muito longe, os cisalhamentos horizontais de corrente são nulos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9.5)$$

Neste caso a equação da continuidade resume-se a:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (9.6)$$

ou seja, a velocidade vertical  $w$  é constante ao longo do eixo  $z$ . Como o fundo é plano,  $w$  deve ser nulo bem próximo do fundo, então sendo  $w$  constante na coluna d'água e sendo  $w$  nulo em um ponto da coluna,  $w$  deve ser nulo em toda a coluna d'água. Assim ficamos apenas com  $u$  e  $v$ , e estes são constantes horizontalmente. Isto significa um movimento horizontal e estacionário, que se apresenta em equilíbrio hidrostático na vertical.

Neste caso os termos de atrito, nas equações horizontais do movimento resumem-se as derivadas de segunda ordem de  $u$  e  $v$  em relação a  $z$  e torna-se nulo na componente vertical:

componentes horizontais:

$$-fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (9.7)$$

$$+fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (9.8)$$

componente vertical:

$$g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (9.9)$$

Nas equações 9.7 e 9.8 o coeficiente de viscosidade aparece com o índice  $v$  pois trata-se da componente vertical do termo de atrito, já que a parte horizontal do laplaciano de  $u$  e  $v$  é nula.

Lembrando que estamos estudando o movimento na camada de Ekman e que nesta região o fluxo resultante e a soma do fluxo geostrófico e do fluxo gerado pelo atrito do vento, vamos separar as componentes  $u$  e  $v$  do fluxo em suas componentes geostrófica e não-geostrófica:

$$u = u_g + u_e \quad (9.10)$$

$$v = v_g + v_e \quad (9.11)$$

onde o índice  $g$  indica geostrofia e  $e$  fluxo de ekman.

Substituindo estas variáveis nas equações 9.7 e 9.8, lembrando que a componente geostrófica do fluxo é constante ao longo do eixo  $z$ , ficamos com:

$$-f(v_g + v_e) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_v \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2} \quad (9.12)$$

$$+f(u_g + u_e) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu_v \frac{\partial^2 v_e}{\partial z^2} \quad (9.13)$$

Parte da solução é o fluxo geostrófico e parte é o fluxo de Ekman. Sabemos que o fluxo geostrófico está associado ao gradiente de pressão e o fluxo de Ekman ao atrito, portanto como estas equações são lineares as soluções podem ser somadas ou separadas como queiram<sup>1</sup>, assim podemos fazer:

---

<sup>1</sup>Para um sistema linear a soma de duas soluções também é uma solução.

$$-fv_g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (9.14)$$

$$+fu_g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (9.15)$$

e

$$-fv_e = \nu_v \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2} \quad (9.16)$$

$$+fu_e = \nu_v \frac{\partial^2 v_e}{\partial z^2} \quad (9.17)$$

Na vertical continuamos com o equilíbrio hidrostático:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (9.18)$$

As equações 9.14 e 9.15 representam o fluxo geostrófico e as equações 9.16 e 9.17 representam o fluxo de ekman.

### 9.1.2 Analisando as equações de Ekman

As soluções para  $u_e$  e  $v_e$  podem ser obtidas se encontrarmos equações para uma única variável, pois tanto em 9.16 como 9.17 aparecem duas variáveis ( $u_e$  e  $v_e$ ). Precisamos trabalhar as equações de modo a encontrar uma única equação para  $u_e$  e uma para  $v_e$ . A equação para  $u_e$  é obtida derivando-se a equação 9.16 em relação a  $z$  duas vezes e substituindo na equação 9.17:

$$\frac{\partial^4 u_e}{\partial z^4} + \frac{f^2}{\nu_v^2} u_e = 0 \quad (9.19)$$

e analogamente para  $v_e$ :

$$\frac{\partial^4 v_e}{\partial z^4} + \frac{f^2}{\nu_v^2} v_e = 0 \quad (9.20)$$

Assim obtemos duas equações diferenciais de quarta ordem para  $u_e$  e  $v_e$ . A solução para estas equações é derivada a partir da solução geral para equações diferenciais deste tipo:

$$u_e = \pm V_{agua} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi z}{H} + \theta\right) \cdot \exp\left(\frac{\pi z}{H}\right) \quad (9.21)$$

e

$$v_e = V_{agua} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi z}{H} + \theta\right) \cdot \exp\left(\frac{\pi z}{H}\right) \quad (9.22)$$

onde:

$V_{agua}$  é o vetor corrente superficial, o sinal de + e - na fórmula de  $u_e$  refere-se aos hemisférios norte e sul, respectivamente;

$H$  é a profundidade da camada de Ekman;

$\theta$  é o ângulo que o vento faz em relação ao norte.

A velocidade superficial da água  $V_{agua}$  é calculada em função do atrito do vento na superfície do oceano:

$$V_{agua} = \frac{\sqrt{2}\pi\tau}{H\rho|f|} \quad (9.23)$$

onde:

$\tau$  é a tensão de cisalhamento do vento na superfície do oceano;

$\rho_{agua}$  é a densidade da água do mar;

$f$  é o parâmetro de coriolis.

A tensão do vento é calculada em função da velocidade deste:

$$\tau = \rho_{ar} \cdot c_d \cdot V_{ar} \cdot |V_{ar}| \quad (9.24)$$

onde:  $\rho_{ar}$  é a densidade do ar;

$c_d$  é um coeficiente de arrasto do vento, o qual é adimensional e varia em função da velocidade do vento;

$V_{ar}$  é o vetor velocidade do vento;

$\tau$  é uma grandeza vetorial, que apresenta, assim como  $V_{ar}$  componentes nas direções  $x$  e  $y$ .

A profundidade da camada de Ekman é calculada em função do coeficiente de viscosidade e do parâmetro de Coriolis:

$$H = \pi \sqrt{\frac{2\nu_v}{|f|}} \quad (9.25)$$

o parâmetro  $f$  aparece sempre em módulo pois não interessa considerar os valores negativos de  $f$  no hemisfério sul.

### 9.1.3 Interpretando as Soluções para Camada de Ekman Superficial

Suponhamos um vento meridional, soprando de norte, com velocidade constante. Vamos orientar nosso eixo  $z$  normal à superfície, com a origem nesta e crescendo em direção ao céu. Portanto, abaixo da superfície  $z$  é negativo. Nestas condições, na superfície, onde  $z = 0$ , as soluções para  $u_e$  e  $v_e$  tornam-se:

$$u_e = \pm V_{agua} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad (9.26)$$

e

$$v_e = V_{agua} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad (9.27)$$

pois  $\theta$ , o ângulo do vento em relação ao norte é nulo. Note que  $u_e$  e  $v_e$  apresentam-se defasados 45 graus em relação ao vetor  $V_{agua}$ . Portanto a direção de propagação da água deve ser 45 graus em direção a direção do vento, ou seja, em superfície o fluxo gerado pelo vento apresenta uma direção de 45 graus em relação a este, para a direita no hemisfério norte e para esquerda no hemisfério sul. Abaixo da superfície o fluxo d'água vai diminuindo em intensidade, pois a exponencial que aparece nas fórmulas ficará com expoente negativo. Enquanto que a direção muda no sentido horário no hemisfério norte e anti-horário no hemisfério sul. A direção do fluxo se torna oposta à direção na superfície na profundidade  $z = -H$ , onde a velocidade diminui para  $exp(-\pi)$ , ou seja, 0,04 do valor da velocidade na superfície. A profundidade  $z = -H$  é normalmente escolhida como a profundidade onde o vento efetivamente atua. Olhando de cima, os vetores de corrente nas várias camadas que compõem a camada de Ekman superficial formam uma espiral.

Normalmente o coeficiente de arrasto do vento é considerado como constante até determinado valor de velocidade do vento:

$c_d = 1.4 \times 10^{-3}$  se a velocidade do vento for até  $11\text{m/s}$ . Acima disto os valores de  $c_d$  são parametrizados em função da velocidade do vento. Usando este valor para  $c_d$  ficamos com:

$$\tau = 1.82 \times 10^{-3} V_{ar} |V_{ar}| \frac{kg}{m^2 s} \quad (9.28)$$

Substituindo este valor na fórmula de  $V_{agua}$  ficamos com:

$$V_{agua} = 0,79 \times 10^{-5} \frac{V_{ar} |V_{ar}|}{H |f|} \text{ m/s} \quad (9.29)$$

Observações de Campo feitas por Ekman indicam que as correntes superficiais e a velocidade do vento podem ser relacionadas pela seguinte fórmula:



$$\frac{V_{agua}}{V_{ar}} = \frac{0,0127}{\sqrt{\sin\theta}} \quad (9.30)$$

onde  $\theta$  é a latitude

Esta relação é válida para a região fora da faixa de 10 graus de latitude em torno do equador.

Substituindo esta expressão na equação 9.29 chegamos a uma expressão para  $H$ :

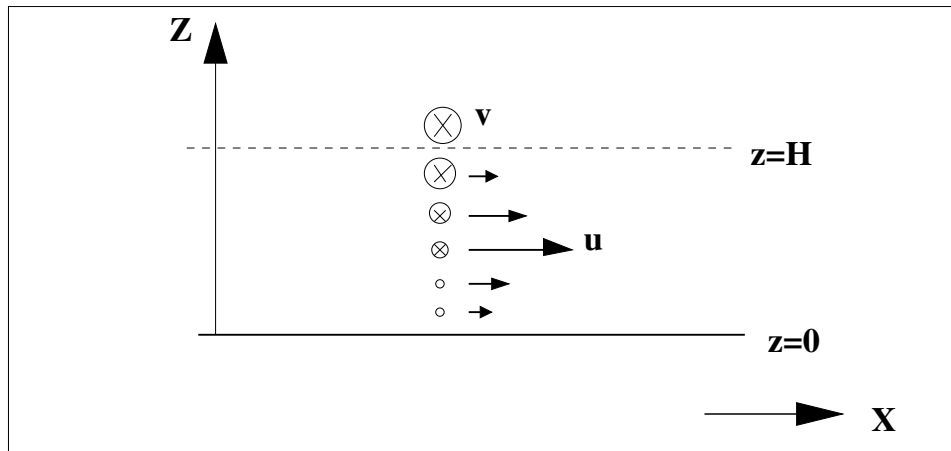
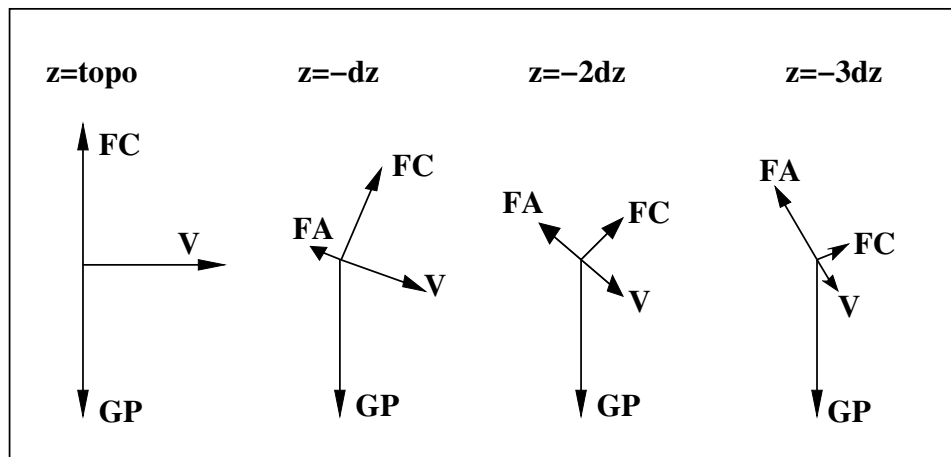
$$H = \frac{4.3V_{ar}}{\sqrt{\sin\theta}} \text{ metros} \quad (9.31)$$

Portanto, sabendo-se a velocidade do vento na latitude  $\theta$  (fora de 10 graus de latitude) pode-se calcular a espessura da camada de Ekman e a velocidade  $V_{agua}$  a qualquer profundidade abaixo da superfície. O fato de  $H$  depender de  $V_{ar}$  sugere que a viscosidade turbulenta aumenta com o aumento de  $V_{ar}$ ; se soubermos  $H$  podemos estimar valores para a viscosidade  $\nu$ .

#### 9.1.4 A Espiral de Ekman no Fundo

As camadas de Ekman aparecem nas imediações de todos os contornos do oceano. Assim como existe uma camada de Ekman na superfície existe outra no fundo, nas imediações do contorno entre o mar e o fundo oceânico. Portanto, existindo um vento constante na superfície, existirá um fluxo geostrófico, gerado pelo empilhamento de água, o qual será constante em toda a coluna d'água, um fluxo de Ekman na camada superficial que se soma ao fluxo geostrófico, e um fluxo de Ekman que aparece devido ao efeito do fundo freando o movimento geostrófico. O fundo oferece resistência ao movimento e diminui a velocidade do fluxo. Diminuindo a velocidade diminui a força de Coriolis, pois esta é proporcional a velocidade, portanto o gradiente de pressão (constante ao longo de  $z$ ) deixa de ser balanceado por Coriolis. Este efeito é tanto mais forte quanto maior a proximidade do fundo, e vai diminuindo conforme nos afastamos do fundo até se extinguir a uma determinada altura acima do fundo. Esta altura é o topo da camada de Ekman de fundo. Desta vez orientamos nosso eixo  $z$  perpendicular ao fundo, sendo a origem  $z = 0$  no fundo. O sentido positivo de  $z$  é em direção à superfície do mar.

Acima do topo da camada de Ekman de fundo existe o equilíbrio geostrófico. No topo da camada de Ekman o fluxo geostrófico começa a sentir o efeito do fundo e começa a ser freado. Portanto a força do Gradiente de Pressão (GP) deixa de ser balanceada pela força de Coriolis (FC), e isto gera um movimento na direção da força do GP. Quebrando o equilíbrio geostrófico e gerando um novo equilíbrio, agora entre GP, FC e FA (força de Atrito). Logo mais abaixo, aumenta a FA, pois aumenta a proximidade com o fundo, freando ainda mais o movimento, e diminuindo FC. Assim aumenta ainda mais a componente do fluxo na direção de GP, diminuindo a componente geostrófica. Desta forma a velocidade resultante vai diminuindo em direção ao fundo e vai girando, formando uma espiral. Exatamente sobre o fundo a

Figura 9.1: *Espiral de Ekman no fundo - vista lateral*Figura 9.2: *Espiral de Ekman no fundo - vista superior*

velocidade é nula, e pouco acima deste a velocidade é oposta à velocidade no topo da camada de Ekman.

Quando o fluxo é desviado na direção de GP, passa a existir transferência de massa da maior para a menor pressão, tendendo a acabar com o gradiente de pressão. Se a força que gera o gradiente de pressão (o vento) não conseguir manter este gradiente, o mesmo será eliminado, caso contrário ele continua existindo e a camada de Ekman de fundo também. Se a força cessar o fluxo geostrofico e a camada de Ekman continuam existindo mais um tempo de pois se estinguem. Este tempo é conhecido como *tempo de decaimento da camada de Ekman*.

O efeito do atrito com o fundo é de quebrar a geostrofia e produzir fluxo na direção de GP. Na camada de Ekman de fundo trabalho é realizado sobre o fluido pelo GP. Este trabalho é que fornece energia para a manutenção da camada de Ekman. O tempo de decaimento é uma função da razão na qual este trabalho é realizado e da energia cinética nesta camada e na camada geostrofica.

### 9.1.5 Equações para a Camada de Ekman de Fundo

Suponha um fluxo geostrófico na direção leste-oeste, ou seja, zonal. Neste caso, na camada geostrófica:  $u = u_g$  e  $v = 0$ , e na camada de Ekman de fundo:  $u = u_g + u_e$  e  $v = v_e$ . As soluções para  $u_e$  e  $v_e$  na camada de Ekman de fundo são:

$$u_e = -u_g \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{H} + \theta\right) \cdot \exp\left(\frac{-\pi z}{H}\right) \quad (9.32)$$

e

$$v_e = u_g \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{H} + \theta\right) \cdot \exp\left(\frac{-\pi z}{H}\right) \quad (9.33)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $u_g$  e o norte.

A espessura da camada de Ekman é dada por:

$$H = \pi \sqrt{\frac{2\nu_v}{|f|}} \quad (9.34)$$

O tempo de decaimento da camada de Ekman é dado por:

$$T = \frac{H_g}{\sqrt{2\nu_v |f|}} \quad (9.35)$$

## 9.2 O Modelo de Sverdrup para a Circulação Gerada pelo Vento

Sverdrup, baseado na teoria de Ekman, trabalhou na primeira tentativa de explicar a circulação oceânica na forma de grandes giros. Sverdrup partiu das equações do movimento para fluxos com aceleração local desprezível e gradientes horizontais de velocidade também desprezíveis, pois tentava explicar a circulação gerada por um vento constante em uma região no meio do oceano, longe dos contornos laterais. Ou seja, equações para um fluxo com números de Rossby e Ekman horizontal muito pequenos. Portanto as equações utilizadas são as equações 9.1 e 9.2, porém com os termos de atrito reescritos na forma de tensão de cisalhamento e reterdo apenas sua componente vertical, dado que os cisalhamentos horizontais são desprezados:

$$-\rho f v = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \quad (9.36)$$

e

$$+\rho f u = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \quad (9.37)$$

onde:  $\tau_x = \mu_v \frac{\partial u}{\partial z}$  e  $\tau_y = \mu_v \frac{\partial v}{\partial z}$

O que Sverdrup fez foi trabalhar com o transporte na capa superficial dos oceanos, i.e., a velocidade integrada numa camada de oceano desde a superfície até uma profundidade  $z = -h$  onde o transporte do vento se anula. Esta profundidade é abaixo do fundo da camada de Ekman superficial, onde a velocidade é 0,04 do valor de superfície, e portanto praticamente nula. Portanto integramos as equações 9.36 e 9.37 desde  $-h$  até 0.

$$-\int_{-h}^0 \rho f v dz = -\int_{-h}^0 \frac{\partial p}{\partial x} dz + \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial z}\right) dz \quad (9.38)$$

e

$$+\int_{-h}^0 \rho f u dz = -\int_{-h}^0 \frac{\partial p}{\partial y} dz + \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial z}\right) dz \quad (9.39)$$

ou seja:

$$-f M_y = -\frac{\partial P}{\partial x} + \tau_{x0} - \tau_{x-h} \quad (9.40)$$

e

$$+f M_x = -\frac{\partial P}{\partial y} dz + \tau_{y0} - \tau_{y-h} \quad (9.41)$$

Onde:

$$M_x = \int_{-h}^0 \rho u dz \text{ e } M_y = \int_{-h}^0 \rho v dz \text{ e,}$$

$$P = \int_{-h}^0 p dz$$

A equação da continuidade é trabalhada da seguinte forma:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \vec{V}) = 0$$

$$\nabla \bullet (\rho \cdot \vec{V}) = 0$$

quando integrada resulta em:

$$\int_{-h}^0 \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x}\right) dz + \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial \rho v}{\partial y}\right) dz + \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) dz = 0 \quad (9.42)$$

ou seja

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = -(\rho_0 \cdot w_0 - \rho_{-h} \cdot w_{-h}) \quad (9.43)$$

Como em  $z = -h$  o movimento se anula e em  $z = 0$  não existe movimento vertical, pois depois de estabilizado o vento estabiliza-se a superfície,  $w$  deve ser nulo tanto na superfície como em  $-h$ , assim a equação da continuidade resume-se a:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = 0 \quad (9.44)$$

Como Sverdrup tentava explicar um giro, trabalhou com as equações do tranposte na forma de vorticidade, ou seja, calculou o rotacional das equações do movimento, mas apenas a componente vertical deste (dado que o movimento é essencialmente horizontal e apenas a componente vertical de  $\zeta_R$  é importante): derivamos a equação 9.41 em relação a  $x$  e subtraímos a derivada da equação 9.40 em relação a  $y$ .

O resultado é:

$$f\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}\right) + M_y \frac{\partial f}{\partial y} = Rot\tau_0 - Rot\tau_{-h} \quad (9.45)$$

onde:  $Rot$  significa o rotacional de  $\tau$ , ou seja,  $\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\partial y}$ . Ao utilizarmos a equação da continuidade 9.44 na equação 9.45 ficamos com:

$$\beta M_y = Rot\tau_0 - Rot\tau_{-h} \quad (9.46)$$

onde:  $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$  é a variação latitudinal do parâmetro de Coriolis.

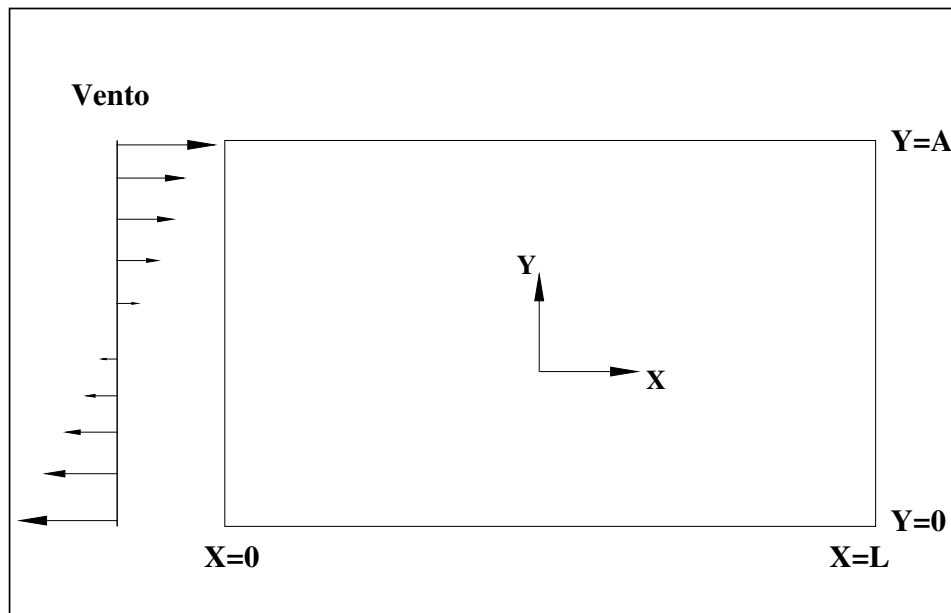


Figura 9.3: Região retangular de extensão  $A \times L$ , entre as latitudes de 10 e 45 graus norte. A esquerda, a componente zonal do vento

Esta equação nos diz que: “a vorticidade gerada por advecção do gradiente de vorticidade planetária é balanceada pela vorticidade induzida pelo rotacional do campo de vento menos a vorticidade retirada, na profundidade  $-h$  pelo rotacional do campo de corrente (que em última instância é o atrito)”

Como na profundidade  $-h$  o movimento gerado pelo vento se anula, podemos dizer que nesta profundidade  $Rot\tau$  é nulo assim ficamos apenas com:

$$\beta M_y = Rot\tau_0 \quad (9.47)$$

Para provar a validade do modelo Sverdrup propôs um campo de vento zonal cisalhado apenas no eixo  $y$ . Representando o campo zonal de ventos da Terra entre as latitude de 10 e 45 graus norte.

$$\tau_x = -\tau_0 \cos\left(\frac{\pi y}{A}\right) \quad (9.48)$$

$$\tau_y = 0 \quad (9.49)$$

onde:

$A$  é a extensão meridional desta região compreendida entre 10 e 45 graus e  $\tau_0$  é o valor máximo que a tensão de cisalhamento do vento atinge. A extensão zonal desta região é  $L$ , conforme é mostrado na figura 9.3.

Substituindo esta solução na equação 9.47 obtemos:

$$M_y = -\frac{\tau_0 \pi}{\beta A} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{A}\right) \quad (9.50)$$

e utilizando a equação da continuidade chegamos a  $M_x$

$$M_x = \frac{\tau_0 \pi^2}{\beta A^2} \cos\left(\frac{\pi y}{A}\right) (x - L) \quad (9.51)$$

As condições de contorno para esta região retangular são que: no contorno o transporte normal ao contorno se anula.

Utilizamos uma função, chamada *função de corrente*  $\psi$  para interpretar o resultado deste campo de vento. Esta função é definida como:

$$\psi(x, y) = \frac{\tau_0 \pi}{\beta A} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{A}\right) (L - x) \quad (9.52)$$

De tal modo que:

$$M_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (9.53)$$

e

$$M_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9.54)$$

O desenho da função de corrente aparece na figura 9.4. Em cada ponto das linhas de corrente o transporte  $\vec{M}$ , cujas componentes são  $M_x$  e  $M_y$ , é tangencial às linhas.

### 9.3 O modelo de Stommel

O modelo de Sverdrup conseguiu explicar, com base nas equações de Ekman e usando apenas o atrito do vento, uma parte da circulação dos oceanos. Os resultados de Sverdrup conseguiram reproduzir uma parte do giro anticiclônico do Atlântico Norte, mas não conseguiram reproduzir a circulação nas proximidades da plataforma continental. Stommel por sua vez, resolveu considerar os termos de atrito com o fundo, que Sverdrup desprezou, pois próximo a plataforma continental o atrito com o fundo passa a ser importante. Portanto, a equação utilizada por Stommel é a equação 9.46:

$$\beta M_y = \operatorname{Rot} \vec{\tau}_0 - \operatorname{Rot} \vec{\tau}_h \quad (9.55)$$

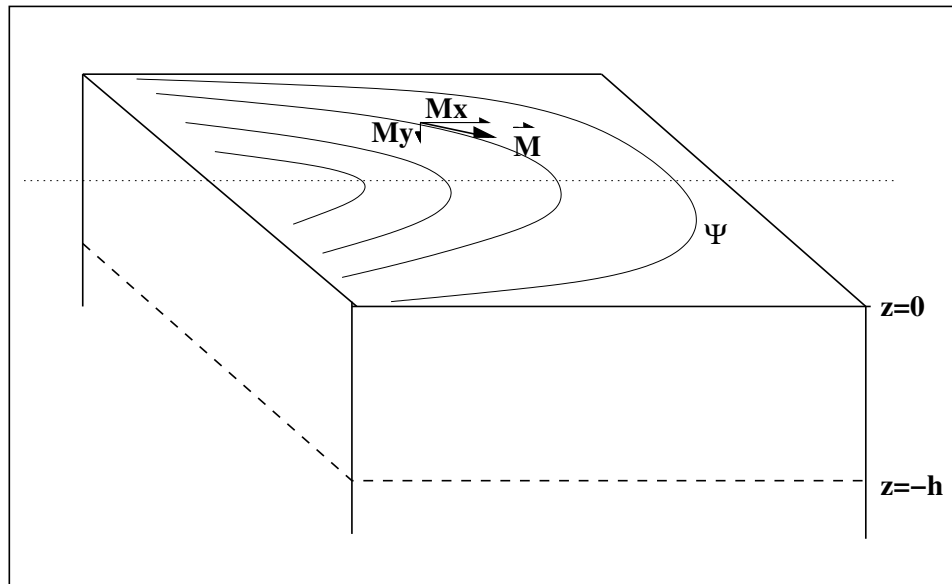


Figura 9.4: Linhas de correntes para a região compreendida entre 10 e 45 graus norte de latitude, gerada pelo campo de vento suposto por Sverdrup.

Mas Stommel colocou o termo de atrito com o fundo de outra forma. Como sabemos, o atrito com o fundo é proporcional a velocidade da água próximo ao fundo, portanto podemos escrever o termo de atrito em  $-h$  de outra forma:

$$Rot\tau_{-h} = kRot\vec{M} \tag{9.56}$$

onde  $\vec{M}$  é o transporte e  $k$  é um coeficiente que expressa a proporcionalidade entre o atrito com o fundo e o transporte.

Assim ficamos com:

$$\beta M_y = Rot\tau_0 - kRot\vec{M} \tag{9.57}$$

A equação 9.57 expressa o Balanço de Stommel.

### 9.3.1 Solução do Modelo de Stommel

Se utilizarmos o mesmo exemplo de um vento zonal utilizado para o modelo de Sverdrup ( $\tau_x = -\tau_0 \cdot \cos(\frac{\pi y}{A})$ ), ficaremos com:

$$\beta M_y = \frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - k\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right) \tag{9.58}$$

ou seja



$$\beta M_y = \frac{\partial \tau_0 \cdot \cos(\frac{\pi y}{A})}{\partial y} - k \left( \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \quad (9.59)$$

$$\beta M_y = -\frac{\tau_0 \pi}{A} \cdot \text{sen}(\frac{\pi y}{A}) - k \left( \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \quad (9.60)$$

E agora, usando a função de corrente  $\psi$ , ficamos com:

$$\beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\tau_0 \pi}{A} \cdot \text{sen}(\frac{\pi y}{A}) - k \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (9.61)$$

A qual pode ser escrita da seguinte forma se usarmos a notação de laplaciano horizontal  $\nabla_h^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ :

$$k \nabla_h^2 \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\tau_0 \pi}{A} \cdot \text{sen}(\frac{\pi y}{A}) = 0 \quad (9.62)$$

A equação 9.62 é uma equação diferencial de segundo grau e segunda ordem para  $\psi$ . A solução particular para esta equação é:

$$\psi(x, y) = \frac{\tau_0 A}{k\pi} \cdot \text{sen}(\frac{\pi y}{A}) \cdot \left( 1 - \frac{\exp(\frac{\beta(L-x)}{2k}) \cdot \text{senh}\alpha x + \exp(-\frac{\beta}{2k} \cdot x) \cdot \text{senh}\alpha(L-x)}{\text{senh}\alpha L} \right) \quad (9.63)$$

onde:

$$\alpha = \left( \frac{\beta^2}{4k^2} + \frac{\pi^2}{A^2} \right)^{1/2} \quad (9.64)$$

Stommel analisou a solução para 3 casos:

a) Rotação nula; ou seja,  $f = 0$ , e conseqüentemente  $\beta = 0$  e  $\alpha = \frac{\pi}{A}$ . Neste caso, a solução 9.63 torna-se:

$$\psi(x, y) = \frac{\tau_0 A}{k\pi} \cdot \text{sen}(\frac{\pi y}{A}) \cdot \left( 1 - \frac{\text{senh}\frac{\pi}{A} x + \text{senh}\frac{\pi}{A} (L-x)}{\text{senh}\frac{\pi}{A} L} \right) \quad (9.65)$$

A qual é uma solução totalmente simétrica, cujo desenho é apresentado na figura 9.5, no painel *a*.

b) Rotação não nula, porém o planeta plano; ou seja,  $f = \text{constante}$  e  $\beta = 0$ . Neste caso a solução continua sendo simétrica, pois  $\beta$  continua sendo nulo.

c) Planeta esférico e em rotação; neste caso  $\beta$  não seria nulo e a solução de Stommel, equação 9.63, seria completa. O desenho desta função no domínio retangular de dimensões  $A \times L$  não é simétrico. As isolinhas da função de corrente  $\psi$  aparecem mais concentradas no lado esquerdo do domínio, conforme mostra a figura 9.5, painel *b*.

Portanto, Stommel concluiu que a causa da intensificação das correntes no lado oeste dos oceanos é a variação latitudinal do parâmetro  $f$ , ou seja, o fato de haver uma intensificação da atuação da força de Coriolis em direção aos polos gera uma intensificação das correntes no lado oeste dos oceanos. Esta intensificação é um fato observado em praticamente todos os oceanos, mas principalmente na corrente do Golfo, corrente do Brasil e corrente de Kuroshio. Estas correntes são parte dos giros oceânicos e formam o lado oeste destes giros. A corrente do Golfo é a mais estudada e conseqüentemente a mais conhecidas de todas. Os modelos de Stommel e Munk reproduziram os giros no oceano Atlântico Norte. Mais os resultados destes modelos quando espelhados para o oceano Atlântico Sul, reproduzem a circulação deste oceano e a intensificação do fluxo na corrente do Brasil.

## 9.4 O Modelo de Munk

Munk, no entanto, considerou que próximo ao contorno oeste onde as correntes se intensificam, deve haver um aumento no cisalhamento horizontal das correntes. Portanto nesta região o atrito lateral deve ser mais importante. Mais importante inclusive que o atrito com o fundo, portanto Munk considerou o termo de atrito lateral e o atrito superficial (do vento) e desprezou o atrito com o fundo. Neste caso a equação da vorticidade para o transporte torna-se:

$$\beta M_y = Rot\vec{\tau}_0 - A_h \nabla_h^2 Rot\vec{M} \quad (9.66)$$

A qual expressa um balanço entre a vorticidade induzida por advecção do gradiente de vorticidade planetária, a vorticidade introduzida pelo vento e a vorticidade retirada pelo atrito lateral (devido ao cisalhamento horizontal do fluxo).

### 9.4.1 Solução da Equação de Munk

Se utilizarmos novamente a função de corrente  $\psi$ , veremos que o balanço de Munk (equação 9.66) torna-se:

$$\beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = Rot\vec{\tau}_0 - A_h \nabla_h^4 \psi \quad (9.67)$$

onde:  $\nabla_h^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$

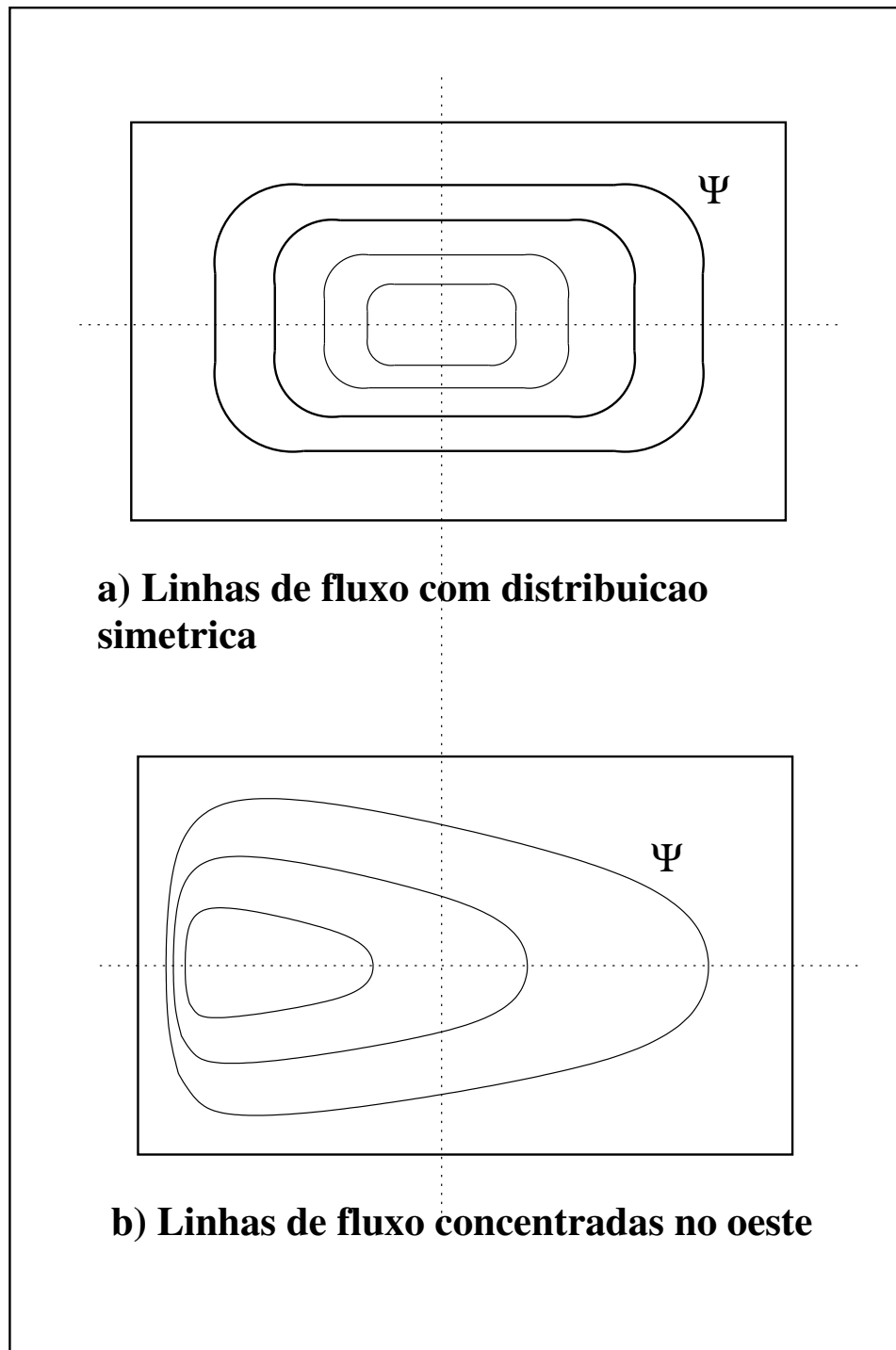


Figura 9.5: *Linhas de corrente segundo o modelo de Stommel, para um parâmetro  $\beta$  nulo, painel a, e não nulo, painel b*

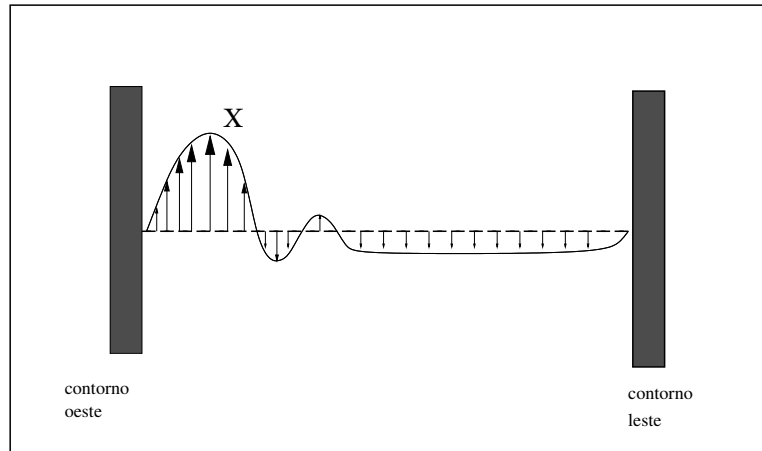


Figura 9.6: Desenho da função  $\chi$  ao longo eixo  $x$  central da região retangular  $A \times L$ .

Estudando a solução da equação 9.67 para a mesma região retangular de dimensões  $A \times L$  e um vento zonal  $\tau_x = \tau_0 \cdot \cos(\frac{\pi y}{A})$  veremos que esta tem a seguinte forma:

$$\psi(x, y) = -\frac{L}{\beta} \chi \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \quad (9.68)$$

onde:

$$\chi(x) = \left(1 - \frac{1}{kL}\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{kx}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot kx - \frac{\pi}{6}\right) + 1\right) - \frac{1}{kL} (kx - e^{-k(L-x)}) \quad (9.69)$$

onde:

$$k = \sqrt[3]{\frac{\beta}{A_h}}$$

Independente de qual o aspecto matematico que apresenta a função  $\chi$ , veremos que o desenho desta função ao longo do eixo  $x$  do dominio  $A \times L$  aproxima-se muito do campo de corrente encontrado no Atântico Norte. Note, na figura 9.6, que na porção central desta região os vetores apresentam pequeno módulo e nenhum cisalhamento horizontal. Próximo ao contorno leste, estes vetores apresentam-se também com pequeno módulo e um pequeno cisalhamento muito próximo ao contorno, porém próximo ao contorno oeste o módulo dos vetores não só aumenta bastante, mas apresenta grandes cisalhamentos e inversões de fluxo. Munk associou as inversões de direção à recirculação da corrente do Golfo.

O desenho da função linha de corrente da solução de Munk apresenta aspecto semelhante a de Stommel, porém contém feições que explicam além da intensificação das correntes no lado oeste dos oceanos, a retroflexão das correntes de contorno oeste, veja as figuras 9.7 e 9.8.

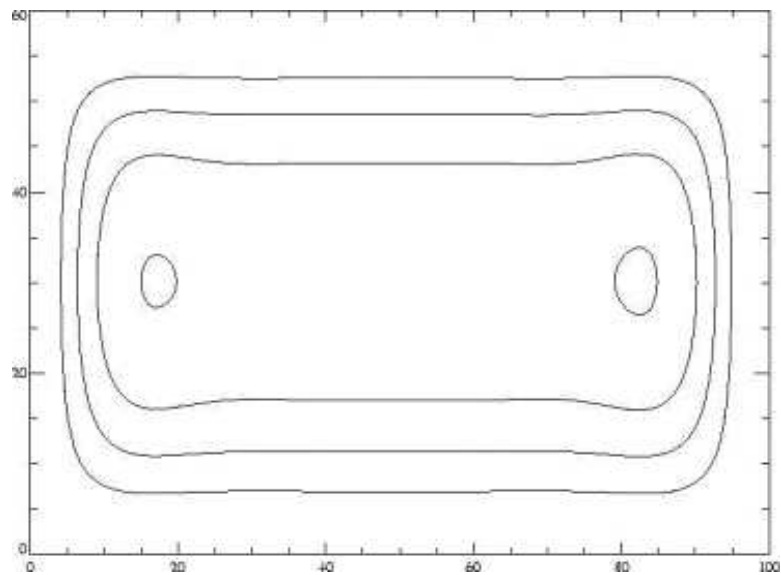


Figura 9.7: Desenho da função de corrente  $\psi$  segundo Munk (1950), para  $\beta = 0$ .

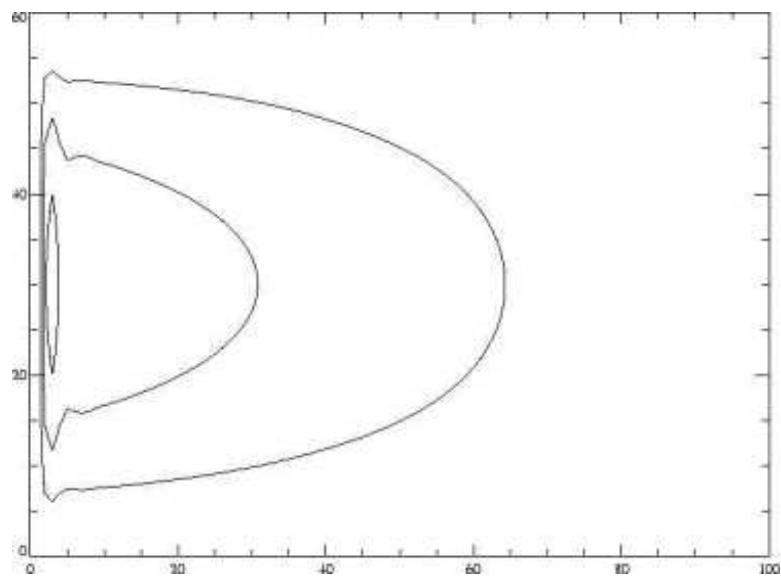


Figura 9.8: Desenho da função de corrente  $\psi$  segundo Munk (1950), para  $\beta$  não nulo e constante.

## 9.5 A Intensificação das Correntes Oeste Explicada por Conservação de Vorticidade.

Como foi visto anteriormente, o deslocamento das massas d'água nos giros de larga escala, na bacia oceânica, ocorre de modo que conserva vorticidade potencial  $\Pi = \frac{\zeta+f}{H}$ . Se levarmos em conta que a profundidade  $H$  deve se manter aproximadamente constante na bacia oceânica, veremos que a conservação de  $\Pi$  dependerá apenas das variações de  $\zeta$  e  $f$ . Ou seja, para que haja conservação de vorticidade potencial, quando a vorticidade planetária  $f$  aumentar a vorticidade relativa  $\zeta$  deverá diminuir, e vice-versa. Ao mesmo tempo sabemos, pela equação vorticidade, que vorticidade relativa pode ser gerada (ou destruída) por: a) advecção do gradiente de vorticidade planetária, b) rotacional do stress do vento na superfície do oceano, c) cisalhamentos do campo de velocidade (atrito).

Imaginando um oceano Atlântico Norte totalmente retangular, limitado horizontalmente pelos continentes Americano e Europeu, e limitado ao norte pelo giro ciclônico e ao sul pelo sistema de correntes zonais equatoriais, veremos que nesta porção retangular deve haver conservação de  $\Pi$ . Sabemos que a vorticidade relativa induzida pelo vento nesta região é sempre negativa em qualquer ponto, porém a vorticidade relativa induzida pela planetária deverá ser negativa no lado oeste e positiva no lado leste. Em outras palavras, quando as massas d'água sobe em direção ao polo no lado oeste, próximo ao continente americano elas ganham vorticidade planetária, portanto devem perder relativa e ao contrário do outro lado. Portanto, no lado leste (do oceano) existe uma compensação entre as vorticidades induzidas por vorticidade planetária e pelo vento, pois uma é positiva e a outra negativa. No entanto, no lado oeste, ambas são negativas. Para compensar estas vorticidades negativas deve haver um cisalhamento muito forte que induza uma vorticidade relativa positiva (causada por atrito) que compense as vorticidades negativas. Isto só pode ser possível se as correntes forem mais fortes deste lado.

# Capítulo 10

## Circulação Termohalina dos Oceanos

Até agora estávamos considerando o oceano homogêneo em termos de distribuição espacial de densidade, pois assim pudemos estudar os movimentos gerados pelo vento sem a influência daqueles gerados por gradientes de densidade. No entanto, como foi explicado no início do curso, uma parte do movimento dos oceanos decorre dos gradientes de densidade gerados pela absorção diferenciada (latitudinalmente) da radiação solar. O objetivo deste capítulo é explicar estes movimentos.

Dissemos no primeiro capítulo que deveríamos esperar uma distribuição de calor, por ação dos movimentos oceânicos, do equador em direção aos polos, para que a Terra pudesse atingir a sua temperatura de equilíbrio. Portanto é de se esperar que existam correntes oceânicas em direção aos polos. Na circulação dirigida pelo vento parte das correntes ocorrem em direção aos polos, mas estas não chegam até as latitudes polares, e além disto estão limitadas verticalmente à camada superficial e ao contorno oeste dos oceanos. Veremos agora como os gradientes latitudinais de temperatura geram as correntes que fazem este papel de equilibrar a distribuição de calor. Passamos então a considerar o oceano como não homogêneo e neste caso a densidade não é mais uma variável constante e conhecida, tornando-se uma das incógnitas do nosso sistema de equações e, conseqüentemente temperatura e salinidade também o serão. Precisaremos então das equações que expressam conservação destas propriedades, as quais foram descritas no capítulo 5. Veremos o caso mais simples, em que o oceano pode ser dividido em duas camadas verticais, uma acima da termoclina e outra abaixo desta. Neste caso as equações do movimento, continuidade e conservação de calor serão suficientes para demonstrar a teoria.

Uma das perguntas mais importantes a ser respondida é:

*Por que a posição da termoclina permanece mais ou menos constante ?*

Deve haver algum processo que equilibre a difusão de calor para as camadas mais fundas do oceano, pois se a fonte de calor vem de cima e este calor está sempre sendo absorvido e se difundido para baixo, seria natural esperar que a posição da termoclina fosse cada mais pra baixo no oceano. No entanto, verificamos que isto não ocorre.

Veremos que a resposta é:

*O calor que é difundido para baixo é equilibrado pela advecção de água fria para cima, mantendo a posição da termoclina mais ou menos permanente, com pequenas oscilações sazonais causadas pelas diferenças nas taxas de absorção da radiação solar ao longo do ano.*

O movimento associado a este padrão de distribuição de calor ocorre no oceano abissal (além do talude continental e abaixo da termoclina). As correntes (integradas na coluna d'água) que levam água do equador para os polos ocorrem em toda a extensão da planície abissal, enquanto que as correntes de retorno, que trazem a água fria dos pólos, ficam limitadas ao contorno oeste dos oceanos (figura 10.2). No caminho de retorno para o equador ocorre a convecção de água fria para cima, que equilibra a distribuição vertical de calor.

## 10.1 Equações de conservação de sal e calor para oceano estacionário

Assim como foi feito para as equações de conservação de momento e massa, no capítulo 6, faremos com as equações de conservação de sal e calor (equações 5.42 e 5.47), ou seja, faremos a distinção entre as distribuições médias e variações em torno da média das variáveis *calor* e *sal*, pois estamos modelando os processos médios (aqueles que tem uma escala espacial suficientemente grande para serem influenciados pela rotação da Terra)<sup>1</sup>. Portanto vamos separar nossas variáveis em *média* e *desvios sobre a média*.

$$\begin{aligned} T &= \bar{T} + \tilde{T} \\ S &= \bar{S} + \tilde{S} \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis separadas em média + desvios nas equações 5.42 e 5.47 e seguindo o mesmo processo descrito para as equações do movimento no capítulo 6, ou seja, calculando a média das equações termo a termo, lembrando sempre que a média dos desvios é nula, chegamos às seguintes equações:

$$\frac{\partial \rho c_p \bar{T}}{\partial t} + \nabla(\bar{\vec{V}} \rho c_p \bar{T}) = \nabla(k_{dc} \nabla(\rho c_p \bar{T})) + \nabla(\overline{\vec{V}' \rho c_p T'}) \quad (10.1)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{S}}{\partial t} + \nabla(\bar{\vec{V}} \rho \bar{S}) = \nabla(k_{ds} \nabla(\rho \bar{S})) + \nabla(\overline{\vec{V}' \rho S'}) \quad (10.2)$$

Os termos  $\overline{\vec{V}' \rho c_p T'}$  e  $\overline{\vec{V}' \rho S'}$  representam a ação dos processos turbulentos na distribuição de sal e calor e não podem se desprezados. Estes termos são parametrizados na forma de coeficientes de difusão turbulenta de sal e calor ( $k_{ts}$  e  $k_{tc}$ ) e gradientes de  $\bar{S}$  e  $\bar{T}$ , pois a turbulência será tanto maior quanto maior forem os gradientes destas variáveis. Assim ficamos com as seguintes equações,

<sup>1</sup>Devemos manter em mente que a média é calculada para um período de tempo longo o suficiente para eliminar as oscilações de curto período, mas curto suficiente para manter as oscilações dos processos médios.



$$\frac{\partial \rho c_p \bar{T}}{\partial t} + \nabla(\bar{V} \rho c_p \bar{T}) = \nabla(k_{dc} \nabla(\rho c_p \bar{T})) + \nabla(k_{tc} \nabla(\rho c_p \bar{T})) \quad (10.3)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{S}}{\partial t} + \nabla(\bar{V} \rho \bar{S}) = \nabla(k_{ds} \nabla(\rho \bar{S})) + \nabla(k_{ts} \nabla(\rho \bar{S})) \quad (10.4)$$

A ação dos processos turbulentos é muito mais eficiente na distribuição de sal e calor do que os processo moleculares, portanto os coeficientes turbulentos são muitas ordens de grandezas superiores aos coeficientes moleculares, e assim estes últimos podem ser desprezados em comparação aos primeiros. Assim nossas equações ficam com o aspecto original, porém tratam-se agora de equações que representam as distribuições médias destas variáveis, e os coeficientes de difusão, são coeficientes turbulentos.

$$\frac{\partial \rho c_p \bar{T}}{\partial t} + \nabla(\bar{V} \rho c_p \bar{T}) = \nabla(k_{tc} \nabla(\rho c_p \bar{T})) \quad (10.5)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{S}}{\partial t} + \nabla(\bar{V} \rho \bar{S}) = \nabla(k_{ts} \nabla(\rho \bar{S})) \quad (10.6)$$

Estas equações, principalmente a equação 10.5, são utilizadas para modelar a teoria descrita no início deste capítulo, ou seja um estado estacionário em que o oceano abissal se comporta basicamente com duas camadas verticais, cuja interface é a termoclina, as quais trocam calor entre si mantendo a posição da termoclina estável. Em se tratando de um estado estacionário o termo de aceleração ( $\partial T/\partial t$ ) é desprezado e assim ficamos apenas com os termos advectivos e difusivos.

$$\nabla(\bar{V} \rho c_p \bar{T}) = \nabla(k_{tc} \nabla(\rho c_p \bar{T})) \quad (10.7)$$

O estado estacionário da distribuição de calor no oceano abissal ocorre principalmente devido ao balanço entre os processos de convecção de água fria para cima e difusão de água quente para baixo, portanto os termos mais importantes na equação 10.7 são os termos  $w \frac{\partial \rho c_p T}{\partial z}$  e  $k_{tc} \frac{\partial^2 \rho c_p T}{\partial z^2}$ .

$$w \frac{\partial \rho c_p T}{\partial z} = k_{tc} \frac{\partial^2 \rho c_p T}{\partial z^2} \quad (10.8)$$

Em teoria a equação 10.8 basta para podermos representar a termoclina. A solução desta equação é:

$$T = T_o \cdot \exp(wz/k_{tc}) \quad (10.9)$$

A qual representa um decaimento exponencial da quantidade calor com a profundidade, na camada inferior (abaixo da termoclina).  $T_o$  é a temperatura no topo da camada inferior.

Assim temos uma camada de mistura, na qual as variações de  $\rho c_p T$  são mais intensas e obedecem as trocas com a atmosfera e uma camada inferior na qual a quantidade de calor decai exponencialmente.

Esta é uma representação bastante simplificada da distribuição de calor nos oceanos, pois trata-se da primeira tentativa de explicação destes processos. Modelos mais complicados da distribuição de calor já existem.

## 10.2 A circulação do Oceano Abissal

A circulação termohalina ocorre no oceano abissal o qual é estacionário, e fora das camadas de Ekman, portanto os termos de aceleração e atrito das equações 6.49, 6.50 e 6.51 podem ser desconsiderados. Isto significa que ficamos apenas com o equilíbrio entre os termos de Coriolis e gradiente de pressão na horizontal e gradiente de pressão e gravidade na vertical, ou seja, equilíbrios geostrófico e hidrostático. Portanto, o estado estacionário da circulação termohalina é geostrófico e está em equilíbrio hidrostático. O gradiente de pressão que gera o movimento é gerado pelos gradientes de densidade, portanto a densidade não é mais homogênea, como foi considerado no estudo de alguns dos modelos da circulação dirigida por vento, sendo mais uma das nossas variáveis incógnitas. Portanto precisamos de mais uma equação que será a equação para conservação de calor para estado estacionário (equação 10.7), porém sem os termos de difusão lateral de calor dado que estamos modelando um estado médio dos oceanos. Juntamente com a equação da continuidade formamos o nosso sistema de equações.

$$-f.v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (10.10)$$

$$+f.u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (10.11)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \quad (10.12)$$

$$\frac{\partial(u\rho c_p T)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho c_p T)}{\partial y} + \frac{\partial(w\rho c_p T)}{\partial z} = k_z \frac{\partial^2 \rho c_p T}{\partial z^2} \quad (10.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (10.14)$$

Na equação 10.13  $k_z$  é o coeficiente de difusão vertical de calor. Consideramos este coeficiente constante e deixamos de escrever as barras sobre  $T$  para facilitar a escrita.

Este sistema de equações ainda não é solúvel pois temos a densidade ( $\rho$ ) como incógnita, além de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$  e  $T$ . Para torná-lo solúvel fazemos uma aproximação, separando a densidade em um estado básico  $\rho_o$  e um desvio sobre o estado básico  $\tilde{\rho}$ , sendo o estado básico aquele que está em equilíbrio hidrostático e os desvios as oscilações em torno deste estado. Assim, nas equações do movimento (10.10, 10.11 e 10.12) as variáveis  $p$  e  $\rho$  são separadas em:

$$\begin{aligned} p &= \bar{p} + \tilde{p} \\ \rho &= \rho_o + \tilde{\rho} \end{aligned}$$

As quais, quando substituídas nas devidas equações resultam em:

$$-f.v = -\frac{1}{\rho_o + \tilde{\rho}} \frac{\partial \bar{p} + \tilde{p}}{\partial x} \quad (10.15)$$

$$+f.u = -\frac{1}{\rho_o + \tilde{\rho}} \frac{\partial \bar{p} + \tilde{p}}{\partial y} \quad (10.16)$$

$$\frac{1}{\rho_o + \tilde{\rho}} \frac{\partial \bar{p} + \tilde{p}}{\partial z} = -g \quad (10.17)$$

O estado básico é o estado de repouso, no qual os gradientes horizontais de pressão são nulos, portanto nas equações 10.15 e 10.16 as derivadas de  $\bar{p}$  relativas a  $x$  e  $y$  se anulam. Na equação 10.17 o termo  $\partial \bar{p} / \partial z$  se anula com  $\rho_o g$ , pois estes representam o equilíbrio hidrostático. A aproximação que fazemos é desprezar os desvios de densidade  $\tilde{\rho}$ , pois estes são muito pequenos quando comparados com a densidade do estado básico, nas equações 10.15 e 10.16, mas na equação 10.17 estes são associados a  $g$ , da seguinte forma:

$$g_r = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_o} g \quad (10.18)$$

onde  $g_r$  é chamada de gravidade reduzida. Nossas equações ficam então:

$$-f.v = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \quad (10.19)$$

$$+f.u = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \quad (10.20)$$

$$\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} = -g_r \quad (10.21)$$

O termo  $g_r$ , ou seja,  $\frac{\tilde{\rho}}{\rho_o} g$ , representa a flutuabilidade do fluido (“buoyancy” em ingles), o qual leva em consideração as oscilações do campo de densidade. Este fenômeno será representado

pelas perturbações do campo de temperatura da seguinte forma:  $\frac{\tilde{p}}{\rho_o}g = -g\alpha T$ , onde  $\alpha$  é um coeficiente de expansão térmica da água e  $T$  a temperatura. Assim nossas equações do movimento ficam com o seguinte aspecto:

$$-f.v = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \quad (10.22)$$

$$+f.u = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \quad (10.23)$$

$$\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} = g\alpha T \quad (10.24)$$

Na equação 10.13 também substituímos  $\rho$  por  $\rho_o + \tilde{\rho}$  e desprezamos as oscilações  $\tilde{\rho}$  e consideramos  $c_p$  constante. Assim todos os termos ficam multiplicados por uma constante  $\rho_o c_p$ , a qual é cancelada. Nossa equação para conservação do calor fica então com o seguinte aspecto:

$$\frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} + \frac{\partial(wT)}{\partial z} = k_{tz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (10.25)$$

a qual pode ser reescrita, se separarmos as derivadas de produtos, da seguinte forma:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} + T \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (10.26)$$

O fato do fluido ser incompressível ( $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ ) implica que podemos desprezar o quarto termo da equação acima, e assim ficamos com uma equação para conservação de calor do estado básico de um fluido incompressível.

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (10.27)$$

As equações 10.22, 10.23, 10.24 e 10.27 juntamente com a equação da continuidade 10.14 formam um sistema de 5 equações, para 5 incógnitas ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$  e  $T$ ), que pode ser resolvido para descrever a circulação termohalina dos oceanos. A temperatura pode ser interpretada como uma *temperatura equivalente*, que incorpora os efeitos da salinidade, desde que uma relação linear entre  $\rho$  e  $T$  e  $S$  seja assumida.

### 10.2.1 O modelo de Stommel e Arons

Stommel e Arons (1958) elaboraram um modelo que explica a circulação do oceano abissal sem resolver o sistema de equações acima. O modelo elaborado pelos mesmos baseia-se

em conservação de vorticidade, pois esta é uma circulação que ocorre com conservação de vorticidade potencial.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta + f}{H}\right) = 0 \quad (10.28)$$

como a profundidade da camada abissal ( $H$ ) é constante, desde que a posição da termoclina permaneça constante, podemos escrever:

$$\frac{1}{H} \frac{d(\zeta + f)}{dt} = 0 \quad (10.29)$$

Trata-se portanto de uma relação de conservação entre vorticidade relativa e planetária, é de se esperar portanto que a circulação ocorra na forma de um giro, ou próximo disto, semelhante a circulação dirigida pelo vento conforme foi descrita por conservação de vorticidade no capítulo 8. Calculamos então a vorticidade relativa fazendo a derivação cruzada das equações 10.22 e 10.23, ou seja, fazendo a diferença entre a equação 10.23 derivada em relação a  $x$  e a equação 10.22 derivada em relação a  $y$ , pois a componente vertical de  $\zeta$  ( $\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ ) é a mais importante. Assim ficamos com uma equação para a vorticidade relativa.

$$f \frac{\partial u}{\partial x} + f \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \quad (10.30)$$

Os dois termos do lado direito da equação se cancelam desde que assumamos que  $p$  é uma função linear com relação a  $x$  e  $y$  e que a ordem da derivação não importa. Lembrando que a variação latitudinal de  $f$  ( $\frac{\partial f}{\partial y}$ ) é o nosso já conhecido parâmetro  $\beta$ , podemos reescrever a equação 10.30.

$$f \frac{\partial u}{\partial x} + f \frac{\partial v}{\partial y} + \beta v = 0 \quad (10.31)$$

E fazendo uso da equação da continuidade:

$$v = \frac{f}{\beta} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (10.32)$$

Estas duas últimas equações nos dizem que a divergência do fluido, a qual está associada a ressurgência, é acompanhada de um fluxo na direção norte-sul, no sentido dos polos. Sabemos que a circulação no oceano abissal é complicada, existindo diversas extratos verticais, cada qual se locomovendo para uma direção diferente, mas calculando-se o somatório o movimento residual ocorre sempre em direção aos polos. Portanto integramos a equação 10.32 em toda extensão  $H$  da coluna d'água abaixo da termoclina. O fundo desta camada está na profundidade  $z = -H$  e o topo na profundidade  $z = 0$ , portanto fazemos a integral de  $-H$  até 0.

$$\int_{-H}^0 v dz = \int_{-H}^0 \frac{f}{\beta} \frac{\partial w}{\partial z} dz \quad (10.33)$$

$$M_y = \frac{f}{\beta} (w_0 - w_{-H}) \quad (10.34)$$

onde:  $M_y = \int_{-H}^0 v dz$  é o transporte, ou seja, a velocidade integrada na coluna, na direção  $y$ . Fazemos o mesmo com a equação da continuidade, e assim podemos calcular  $M_x$ .

Considerando que o fundo é plano podemos desprezar a velocidade vertical no fundo ( $w_{-H} = 0$ ).

$$\int_{-H}^0 \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-H}^0 \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{-H}^0 \frac{\partial w}{\partial z} dz \quad (10.35)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + w_0 - w_{-H} \quad (10.36)$$

A partir da equação 10.35 (desprezando  $w_{-H}$ ) obtemos  $M_x$ .

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = -\frac{\partial M_y}{\partial y} - w_0 \quad (10.37)$$

Substituindo 10.34 em 10.37 obtemos:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{f}{\beta} w_0 \right) - w_0 \quad (10.38)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = -\frac{w_0}{\beta} \frac{\partial f}{\partial y} - w_0 \quad (10.39)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = -\frac{w_0 \beta}{\beta} - w_0 \quad (10.40)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = -2w_0 \quad (10.41)$$

Para calcular  $M_x$  precisamos integrar a equação 10.41 desde o interior do oceano até o contorno leste (“ $L$ ”).

$$\int_x^L \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} \right) dx = - \int_x^L 2w_0 dx \quad (10.42)$$

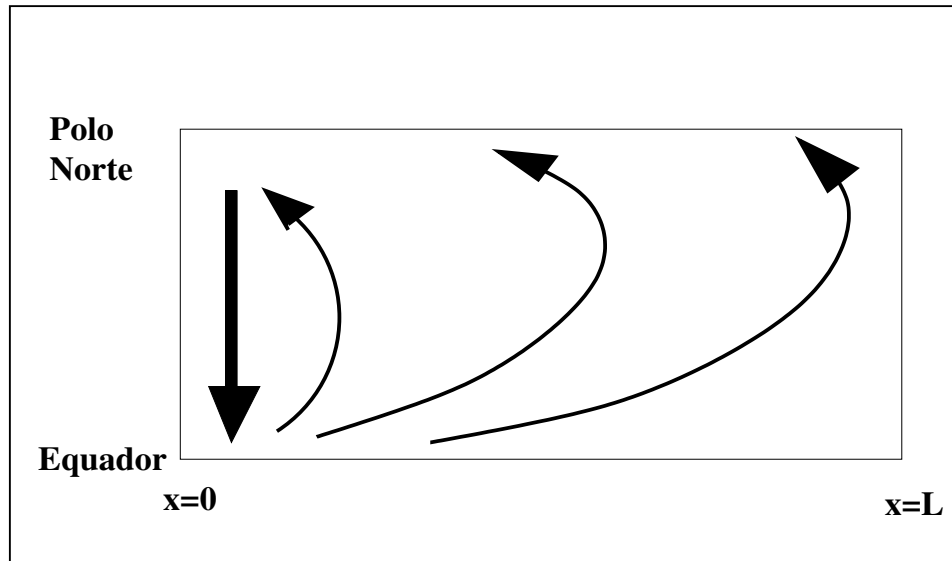


Figura 10.1: Modelo de circulação abissal para o Atlântico Norte.

$$M_x(L) - M_x(x) = -2w_0(L - x) \quad (10.43)$$

Como no contorno leste  $M_x$  deve se anular pois o transporte normal ao contorno é nulo, então ficamos com:

$$M_x(x) = 2w_0(L - x) \quad (10.44)$$

As equações 10.34 e 10.44 nos dizem que o transporte zonal ( $M_x$ ) é sempre positivo, pois  $w_0$  é positivo<sup>2</sup>, e o transporte meridional ( $M_y$ ) é positivo no hemisfério norte, onde  $f$  é positivo, e negativo no hemisfério sul, onde  $f$  é negativo. Portanto a circulação abissal tem o aspecto semi-circular, conforme mostra a figura 10.1.

Este mesmo padrão é observado nos outros oceanos, conforme mostra a figura 10.2.

O processo de convecção de água fria para cima ocorre no caminho de retorno que a água proveniente dos polos desce pela planície abissal.

<sup>2</sup>conforme já foi dito, a velocidade vertical no topo da camada de fundo é para cima (positiva) pois esta balanceia a difusão de calor para baixo

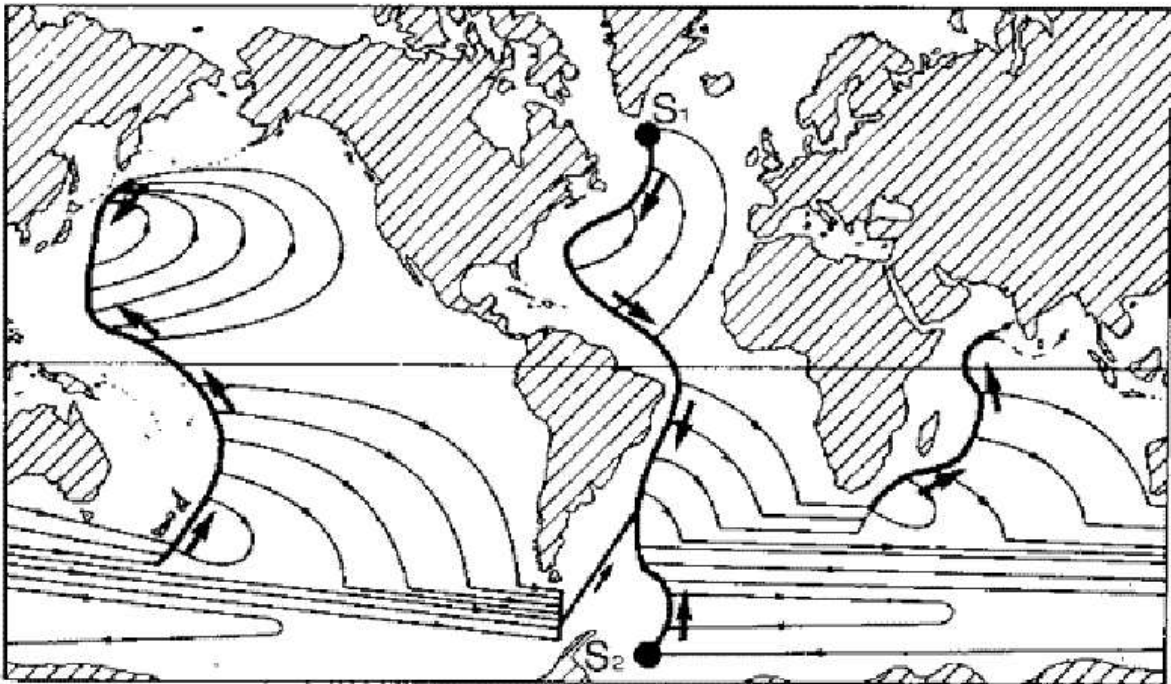


Figura 10.2: *Circulação abissal dos oceanos segundo Stommel e Arons (1958).*



# Capítulo 11

## Ondas influenciadas pela rotação da Terra.

As correntes oceânicas que vimos nos capítulos anteriores, i.e., correntes geostróficas e correntes dirigidas pelo vento, estão em estado quase estacionário. Elas apresentam poucas variações de velocidade, como se fossem um fluxo quase constante. Por isso os termos de aceleração foram desprezados nas equações do movimento. Embebidas nessas correntes acontecem movimentos acelerados, que podem ser vistos como perturbações ou instabilidades do estado de equilíbrio dessas correntes. Esses movimentos acelerados são as ondas.

Ondas de diversos comprimentos e períodos ocorrem, desde aquelas que estamos acostumados a ver na praia, as quais tem período de alguns segundos e comprimento de poucos metros ou centímetros, até ondas muito longas, cujo período é maior que o período inercial. As ondas que vemos na praia são ondas geradas pelo vento e denominadas de *ondas de gravidade*, pois o mecanismo restaurador da onda é a força peso. A perturbação causada pelo vento deforma a superfície do mar e a força peso atua no sentido de trazer a superfície da água ao seu estado de repouso, ou seja, restaurar a superfície ao seu estado de equilíbrio. A trajetória descrita pelas partículas ao passar da onda ocorre no plano vertical. Estas ondas não são influenciadas pela rotação da Terra, pois o movimento das partículas é muito pequeno para que a força de Coriolis atue.

No entanto, as ondas cujo período é igual ou maior que o período inercial são extremamente longas, longas o suficiente para serem influenciadas pela rotação. Neste caso, a trajetória das partículas, ao passar da onda, deixa de ocorrer no plano vertical pois adquire uma componente horizontal devido ao efeito de Coriolis. Nestas ondas as partículas descrevem uma elipse inclinada, pois além da força peso existe a força de Coriolis atuando. Estas ondas são *ondas de gravidade influenciadas pela rotação*, conhecidas como *ondas de Poincaré* ou *ondas giroscópicas*.

## 11.1 Equações das ondas influenciadas por rotação

Nos capítulos passados estudamos os movimentos que ocorrem essencialmente na horizontal, desprezando a componente horizontal do movimento, agora passamos a considerá-la. A componente vertical do movimento surge por causa das ondas. Dissemos que o movimento podia ser dividido em *média + desvios da média* e parametrizamos o efeito dos desvios, ficando com equações que representam o movimento médio, o qual é estacionário. Estávamos modelando apenas o campo médio de correntes, que está em equilíbrio hidrostático. Agora, no estudo de ondas, a aceleração local passa a ser importante, pois as oscilações da superfície causam movimentos locais acelerados. Nossas únicas aproximações agora são que o fluido continua sendo incompressível e homogêneo, e que a dissipação por atrito é desprezada. Portanto nossas equações de conservação ficam sendo a equação da continuidade e as três componentes da equação do movimento sem os termos de atrito.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (11.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (11.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (11.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (11.4)$$

Nas equações 11.2, 11.3 e 11.4 os termos advectivos, nos quais aparecem produtos de componentes de  $\vec{V}$  com derivadas de componentes de  $\vec{V}$ , são termos não lineares, pois tratam-se de produtos de incógnitas. O desenvolvimento a ser feito será um estudo linear de ondas, portanto os termos não lineares não são considerados. Assim nossas equações do movimento tornam-se as *equações linearizadas do movimento*.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (11.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (11.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (11.7)$$

As ondas são uma perturbação sobre o estado de repouso do mar (equilíbrio hidrostático), por isto dizemos que existe um estado de repouso, que é chamado de estado básico, mais

as perturbações sobre este estado. Assim cada variável é separada em estado básico + perturbação sobre o estado básico.

$$u(x, y, z, t) = u_o + u''(x, y, z, t) \quad (11.8)$$

$$v(x, y, z, t) = v_o + v''(x, y, z, t) \quad (11.9)$$

$$w(x, y, z, t) = w_o + w''(x, y, z, t) \quad (11.10)$$

$$p(x, y, z, t) = p_o(z) + p''(x, y, z, t) \quad (11.11)$$

O índice “o” indica o estado básico e o índice “” indica a perturbação. O estado básico é o estado de repouso, por isto  $u_o$ ,  $v_o$  e  $w_o$  são nulos. Neste estado a pressão está em equilíbrio hidrostático, ou seja,  $p_o$  varia apenas na direção  $z$  e  $\partial p_o / \partial z = -\rho g$ .

Substituindo estas variáveis nas equações 11.5, 11.6 e 11.7 ficaremos com:

$$\frac{\partial u''}{\partial t} - f v'' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p_o + p'')}{\partial x} \quad (11.12)$$

$$\frac{\partial v''}{\partial t} + f u'' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p_o + p'')}{\partial y} \quad (11.13)$$

$$\frac{\partial w''}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p_o + p'')}{\partial z} - g \quad (11.14)$$

E como as derivadas horizontais de  $p_o$  se anulam pois esta não varia horizontalmente e  $\partial p_o / \partial z$  se cancela com  $\rho g$ , ficamos com:

$$\frac{\partial u''}{\partial t} - f v'' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p''}{\partial x} \quad (11.15)$$

$$\frac{\partial v''}{\partial t} + f u'' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p''}{\partial y} \quad (11.16)$$

$$\frac{\partial w''}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p''}{\partial z} \quad (11.17)$$

Na equação da continuidade, ao substituirmos as variáveis 11.11, as derivadas do estado básico serão nulas, portanto teremos apenas

$$\frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} + \frac{\partial w''}{\partial z} = 0 \quad (11.18)$$

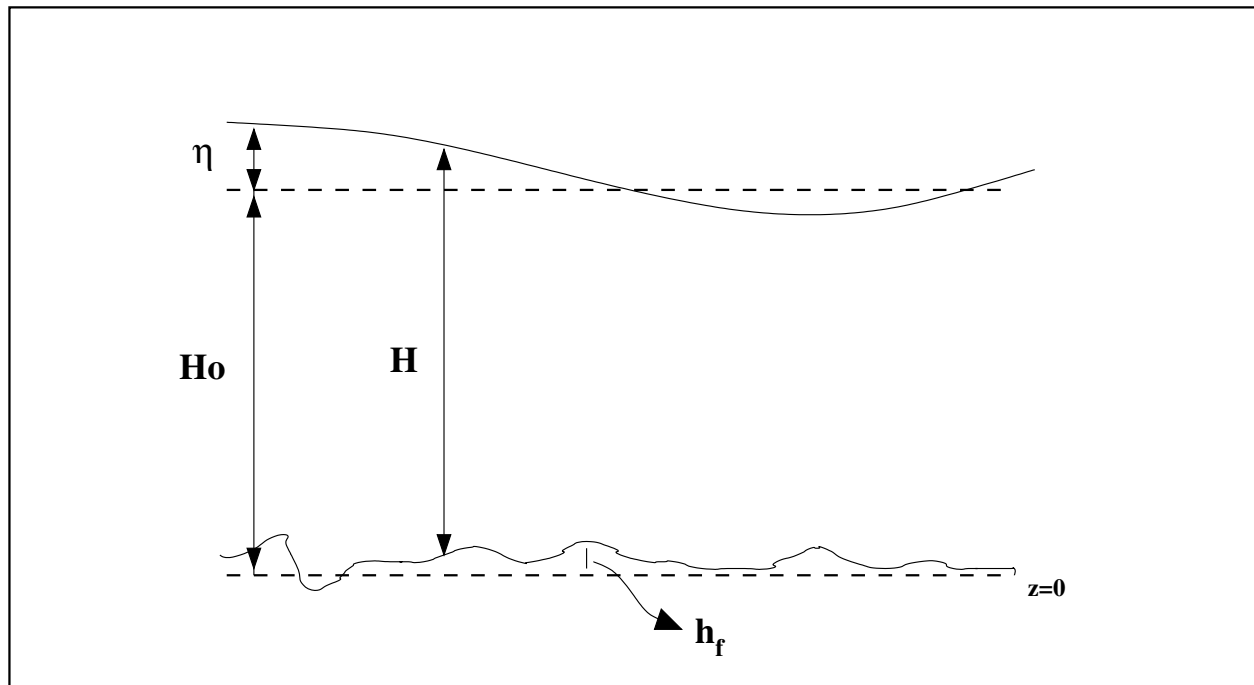


Figura 11.1: Ondas longas sobre a topografia do fundo.

As equações 11.15, 11.16, 11.17 e 11.18 são as equações para o estudo de ondas.

Orientamos o eixo  $z$  de cima para baixo começando no fundo. Assim o fundo está em  $z = 0$ . A topografia de fundo  $h_f$  é o desvio em torno de  $z = 0$ . A coluna d'água é dividida em uma porção  $H_o$ , que vai de  $z = 0$  até o nível de repouso do oceano e uma porção  $\eta$  que são as oscilações em torno do nível de repouso.  $H$  é altura total da coluna d'água, que vai de  $h_f$  até  $\eta$ , conforme mostra a figura 11.1.

As perturbações de pressão  $p''$  são proporcionais às oscilações  $\eta$ .

$$p'' = \bar{\rho}g\eta \quad (11.19)$$

Trata-se da densidade média pois estamos trabalhando com oceano homogêneo. As oscilações  $\eta$  variam horizontalmente e no tempo:  $\eta = \eta(x, y, t)$ , assim como a altura total  $H$ . A topografia de fundo e a altura do nível de repouso, no entanto, variam apenas espacialmente e são independentes do tempo,  $H_o = H_o(x, y)$  e  $h_f = h_f(x, y)$ .

Nosso estudo é direcionado para ondas muito longas, ditas ondas planetárias, e focamos apenas na componente barotrópica dessas ondas. Portanto é útil integrarmos nossas equações verticalmente, e analisarmos o movimento da coluna d'água como um todo. Esse estudo é dito “estudo do movimento global”, contrariamente ao estudo local, que foca em movimentos de menor escala. Estamos assumindo que o efeito do atrito é desprezível, fazendo com que não ocorra decaimento do movimento ao longo da coluna d'água, ou seja que a velocidade não varia verticalmente.

Ao integrarmos a equação da continuidade fazemos a integral de  $h_f$  até  $H_o + \eta$  da equação

11.18

$$\int_{h_f}^{H_o+\eta} \left( \frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} \right) dz = - \int_{h_f}^{H_o+\eta} \left( \frac{\partial w''}{\partial z} \right) dz \quad (11.20)$$

$$\left( \frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} \right) (H_o + \eta - h_f) = -w''_{H_o+\eta} + w''_{h_f} \quad (11.21)$$

A velocidade vertical  $w''$  na superfície é causada pelas oscilações da superfície  $d(H_o + \eta)/dt$  e no fundo pela topografia do fundo  $dh_f/dt$ .

$$w''_{H_o+\eta} = \frac{d(H_o + \eta)}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial H_o + \eta}{\partial x} + v \frac{\partial H_o + \eta}{\partial y} \quad (11.22)$$

$$w''_{h_f} = \frac{dh_f}{dt} = u \frac{\partial h_f}{\partial x} + v \frac{\partial h_f}{\partial y} \quad (11.23)$$

pois  $H_o$  e  $h_f$  não variam no tempo. Assim, a equação da continuidade integrada torna-se:

$$\left( \frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} \right) (H_o + \eta - h_f) = -\frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial H_o + \eta}{\partial x} - v \frac{\partial H_o + \eta}{\partial y} + u \frac{\partial h_f}{\partial x} + v \frac{\partial h_f}{\partial y} \quad (11.24)$$

$$\left( \frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} \right) (H_o + \eta - h_f) = -\frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial (H_o + \eta) - h_f}{\partial x} - v \frac{\partial (H_o + \eta) - h_f}{\partial y} \quad (11.25)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u (H_o + \eta) - h_f}{\partial x} + \frac{\partial v (H_o + \eta) - h_f}{\partial y} \quad (11.26)$$

Porém, como  $H = H_o + \eta - h_f$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u H}{\partial x} + \frac{\partial v H}{\partial y} = 0 \quad (11.27)$$

Nas equações do movimento substituímos as perturbações de pressão  $p''$  por  $\eta$ , dado que estas são proporcionais.

$$\frac{\partial u''}{\partial t} - f v'' = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (11.28)$$

$$\frac{\partial v''}{\partial t} + f u'' = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (11.29)$$

$$\frac{\partial w''}{\partial t} = 0 \quad (11.30)$$

Na componente vertical a derivada de  $\eta$  se anula pois  $\eta$  não varia em  $z$ . As equações 11.28 e 11.29 integradas de  $h_f$  até  $H_o + \eta$  tornam-se:

$$\frac{\partial u'' H}{\partial t} - f(v'' H) = -gH \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (11.31)$$

$$\frac{\partial v'' H}{\partial t} + f(u'' H) = -gH \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (11.32)$$

As equações 11.20, 11.31 e 11.32 formam o sistema de equações que devemos resolver. Combinamos estas 3 equações em uma única equação para  $\eta$ , substituindo as equações 11.31 e 11.32 na equação 11.20.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \eta - \nabla \cdot (gH \nabla \eta) \right] - J(H, \eta) = 0 \quad (11.33)$$

onde:  $J(H, \eta) = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$  é o Jacobiano de  $H$  e  $\eta$ .

A equação 11.33 é uma equação diferencial parcial homogênea, que não é muito fácil de ser resolvida, precisando de condições de contorno. Porém como nosso estudo é voltado para ondas, assumimos que  $\eta$  comporta-se como onda, tendo uma amplitude e uma fase, e utilizamos essa solução oscilatória e periódica de  $\eta$  na equação 11.33.

A variável  $\eta$  é então representada da seguinte forma:

$$\eta(x, y, t) = \eta_o \cdot \cos(kx + ly - \omega t) \quad (11.34)$$

onde  $k$  e  $l$  são os números de onda na direção  $x$  e  $y$ , respectivamente, ou seja,  $k$  e  $l$  são as componentes do vetor *número de onda*  $K$ , e  $\omega$  é a frequência de oscilação. Para melhor entendimento dos parâmetros  $k$ ,  $l$  e  $\omega$  veja a revisão da teoria de ondas no apêndice C.

Ao substituímos a solução 11.34 na equação 11.33 ficamos com uma equação que relaciona a frequência da onda com seu comprimento:

$$\omega^2 = f^2 + C^2 \cdot K^2 \quad (11.35)$$

onde:

$C^2 = g \cdot H$  é a velocidade da onda, e

$K^2 = k^2 + l^2$  é o número de onda.

A equação 11.35 é a relação de dispersão para ondas influenciadas pela rotação da Terra. Quando a onda for curta o parâmetro  $f$  deixa de ser importante e a relação de dispersão torna-se apenas  $\omega^2 = gH.K^2$ , ou seja  $\omega = \sqrt{gH}.K$ , que é a relação de dispersão para ondas de gravidade não influenciadas por rotação. Esta relação nos diz que a frequência da onda depende inversamente do seu comprimento.

Porém se a onda for muito longa  $K$  será extremamente pequeno e a relação de dispersão será apenas  $\omega = f$ , ou seja a frequência da onda é dada pela frequência de rotação da Terra. Estas são ondas que ocorrem no plano  $xy$  cuja restauração não é feita pela gravidade mas sim por Coriolis. Estas ondas são conhecidas por *Ondas de Rossby*. Entre os dois extremos (onda de gravidade puras e ondas de Rossby) existe uma gama de ondas, que são ditas onda de gravidade influenciadas por rotação, ou ondas de Poincaré.

## 11.2 Ondas de Rossby

As ondas de Rossby tem como mecanismo restaurador o gradiente de vorticidade planetaria, assim como as ondas de gravidade puras tem como mecanismo restaurador a força da gravidade. As ondas de Rossby ocorrem quando uma partícula de água se desloca na direção meridional, passando para uma latitude onde a vorticidade planetaria é diferente daquela de sua latitude de origem. A parcela de fluido então fica com uma vorticidade diferente daquela da sua vizinhança e isso força a mesma a retornar a sua latitude de origem (da mesma forma como a gravidade força a superfície do mar a voltar a sua posição de equilíbrio, toda vez que a mesma é perturbada). Ao retornar, a parcela passa da latitude de equilíbrio, indo para uma latitude onde a vorticidade planetaria também é diferente da sua, e assim a parcela de fluido fica oscilando na direção meridional. O movimento portanto ocorre no plano horizontal, e a onda se propaga similarmente ao movimento de uma cobra ao deslocar-se pelo chão.

A frequência de oscilação desse movimento horizontal é a frequência inercial, na latitude onde ocorre o movimento, dado que  $\omega = f$ .

Apesar de a derivação aqui demonstrada ter sido totalmente voltada para a componente barotrópica da onda, sua componente baroclínica é que é mais importante, e mais visível. O primeiro modo da componente baroclínica das ondas de Rossby ocorre na picnoclina, sendo visto como uma anomalia do campo de temperatura que se propaga sempre para oeste.

## 11.3 Ondas de Kelvin

As ondas de Kelvin são ondas longas que existem apenas próximo a contornos laterais, como a costa. Elas são geradas por um empilhamento de água contra costa, causado por exemplo pela passagem de uma frente fria. A amplitude da onda é máxima na costa e decai em direção a oceano aberto. As ondas de Kelvin propagam-se paralelamente a costa de modo a preservar o balanço geostrófico na direção normal a costa, isto é, as velocidades paralelas a costa ( $v$ ), apesar de aceleradas, estão sempre em balanço geostrófico com o gradiente de  $\eta$

na direção normal a costa:

$$f.v = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (11.36)$$

O termo  $\frac{\partial u}{\partial t}$  na equação acima foi desprezado pois as velocidades normais a costa não são aceleradas. Na direção paralela a costa, no entanto, o fluxo é acelerado:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f.u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (11.37)$$

Por estar em balanço geostrofico na direção normal a costa, a onda de Kelvin só pode propagar numa direção. A força do gradiente de pressão é direcionada sempre em direção a oceano aberto, pois a amplitude máxima ocorre na costa, então a força de Coriolis aponta em direção contraria, isto é, em direção ao continente. Desse modo, a componente  $v$  da velocidade tem que ser tal que, no Hemisferio Sul a costa fica a esquerda da direção de propagação, e no Hemisferio Norte ao contrario. Assim, as ondas de Kelvin propagam-se sempre em direção ao equador nas costas leste dos continentes, e em direção aos polos nas costas oeste.

No equador, ocorre o que chamamos de ondas de Kelvin equatoriais. O equador funciona como um contorno para a onda de Kelvin, devido a troca de sinal do parâmetro  $f$ . A onda de Kelvin equatorial se propaga de forma a deixar o equador a sua esquerda, quando no Hemisferio Sul, e a direita quando no Hemisferio Norte. Assim temos duas ondas de Kelvin equatoriais, cada uma propagando em uma direção, uma ao sul do equador e outra ao norte. Uma funcionando como um contorno lateral para a outra.

Devido ao fato de a onda apresentar um decaimento de amplitude em direção a oceano aberto, a solução oscilatoria que propomos para  $\eta$  é da seguinte forma:

$$\eta = \eta_o(x) \cdot \cos(ly - \omega t) \quad (11.38)$$

ou seja, uma amplitude que varia em  $x$  (normal a costa) e uma fase que varia no tempo e na direção paralela a costa.

A qual, quando substituida na equação 11.33 leva a uma relação de dispersão do tipo:

$$\omega^2 = gHl^2 \quad (11.39)$$

Esta relação nos diz que a frequência da onda (ou seu período) está relacionada com o comprimento da onda na direção  $y$  e que não depende de  $f$ , portanto não depende da latitude. Porém, como vimos, a onda está sempre em balanço geostrofico na direção normal a direção de propagação, e portanto a onda só existe se existirem gradientes de  $\eta_o$ , fato este



que depende da existencia de um contorno lateral. Portanto essas ondas são aprisionadas na costa, ou na plataforma continental.

A velocidade de fase da onda de Kelvin é então:

$$c = \frac{\omega}{K} = \frac{\omega}{l} \quad (11.40)$$

pois o vetor  $K$  só tem a componente  $l$ , a qual é a componente paralela ao contorno, dado que onda propaga sempre paralelamente ao contorno lateral. Usando a equação 11.39 na equação 11.40, ficamos com:

$$c = \frac{\omega}{l} = \frac{\sqrt{gH}.l}{l} = \sqrt{gH} \quad (11.41)$$

a qual é a velocidade de fase de ondas de gravidade longas (ondas de aguas rasas) não influenciadas por rotação.

# Apêndice A

## Tópico Especial: Revisão de Cálculo e Algebra Vetorial

### A.1 Campos escalares e vetoriais

Um campo é por definição o espaço de distribuição de uma propriedade. No meio oceânico determinadas propriedades são representadas através de variáveis escalares, pois seu campo pode ser representado apenas pelo módulo (intensidade) da variável ao longo do espaço de distribuição da mesma. Outras propriedades porém, só podem ser representadas na forma de um campo se fornecermos, além do seu módulo em diversos pontos do espaço de distribuição, também a direção e sentido, estas são ditas variáveis vetoriais e seu campo é um campo vetorial. O espaço de distribuição da temperatura da água do mar, em determinada região oceânica, é um exemplo de campo escalar, e o espaço de distribuição da velocidade d'água de uma determinada região do oceano é um exemplo de um campo vetorial.

### A.2 Derivadas totais e parciais

*“Quando determinada propriedade ( $\gamma$ ) varia em função de “n” variáveis ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ), escrevemos :  $\gamma = \gamma(x_1, x_2, x_n)$ . A variação total desta propriedade é a soma das variações parciais da mesma relativas a cada uma das variáveis  $x$ .”*

$$\delta\gamma = \partial_{x_1}\gamma + \partial_{x_2}\gamma + etc... \quad (A.1)$$

onde:

$\delta$  representa variação total;

$\partial_{x_n}$  representa variação parcial relativa a  $x_n$ .

A velocidade ( $\vec{V}$ ) por exemplo é uma propriedade que varia em função do espaço e do tempo ( $t$ ), e como o espaço é tri-dimensional ( $x, y, z$ ), então  $\vec{V}$  varia em função de  $x, y, z$  e  $t$ :

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t).$$

O efeito isolado (variação parcial) causado em  $\vec{V}$  por cada uma das variáveis  $x, y, z, t$  é avaliado fazendo-se as outras constantes, ou seja, a variação parcial de  $\vec{V}$  relativa a  $t$  é avaliada quando  $x, y, z$  são constantes, em outras palavras, para um dado ponto  $(x, y, z)$  fixo avalia-se a variação temporal <sup>1</sup> de  $\vec{V}$ . Por outro lado, poderíamos avaliar para um dado tempo  $t$  fixo qual a variação espacial de  $\vec{V}$  <sup>2</sup>.

As variações parciais de uma variável podem ser representadas através de uma série de Taylor. A variação parcial da velocidade  $\vec{V}$  em relação a  $x$ , por exemplo, expressa em série de Taylor está representada na equação A.2, na qual o valor de  $\vec{V}$  num ponto  $x + dx$  é calculado em função do valor de  $\vec{V}$  no ponto  $x$ .

$$\vec{V}(x + dx) = \vec{V}(x) + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} \cdot \frac{dx^2}{2!} + \frac{\partial^3 \vec{V}}{\partial x^3} \cdot \frac{dx^3}{3!} + \dots \quad (\text{A.2})$$

quantos mais termos forem utilizados na série melhor será a aproximação de  $\vec{V}(x + dx)$ , no entanto, como  $dx$  é uma distância extremamente pequena, esta será menor ainda quando elevada a potências maior ou igual a 2. Os termos de ordem  $dx^2$  ou maior podem ser desprezados e mesmo assim consegue-se uma boa aproximação, e ficamos com:

$$\vec{V}(x + dx) = \vec{V}(x) + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \cdot dx \quad (\text{A.3})$$

Esta fórmula pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\vec{V}(x + dx) - \vec{V}(x) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \cdot dx \quad (\text{A.4})$$

A equação A.4 expressa a variação parcial de  $\vec{V}$  ao longo do eixo  $x$  entre os pontos  $x$  e  $x + dx$ , separados por uma distância  $dx$ . Por um desenvolvimento análogo calculamos as variações parciais da velocidade relativas a  $t, y$  e  $z$ , e a representação da variação total de  $\vec{V}$  é então:

$$d\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz \quad (\text{A.5})$$

Levando-se em conta este tipo de expressão da velocidade ( $\vec{V}$ ), a aceleração, enquanto taxa de variação de  $\vec{V}$  em relação ao tempo, pode ser calculada dividindo-se a equação A.5 por  $dt$ :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (\text{A.6})$$

<sup>1</sup>Esta variação em um ponto fixo também é chamada de “variação local”.

<sup>2</sup>As variações parciais são sempre representadas pelo símbolo  $\partial$ , enquanto que as variações totais são representadas pela letra grega  $\delta$  ou  $\Delta$  (delta) ou pela letra  $d$ . A letra  $d$  refere-se a um diferencial, ou seja, uma variação infinitesimal, e a letra  $\Delta$  ou  $\delta$  a uma diferença finita.

As taxas de variação do espaço em relação ao tempo, nas direções  $x, y, z$ , são respectivamente,  $u, v$  e  $w$ , as componentes de  $\vec{V}$ , nestas direções:

$$u = \frac{dx}{dt}; v = \frac{dy}{dt}; w = \frac{dz}{dt} \quad (\text{A.7})$$

portanto, ficamos com:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial x}.u + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}.v + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}.w \quad (\text{A.8})$$

Na equação A.8 o primeiro termo do lado direito é chamado, como já vimos, variação local, e os outros são conhecidos por variação advectiva, ou simplesmente advecção. Estes três últimos termos representam o transporte do gradiente de  $\vec{V}$  por  $\vec{V}$ , fenômeno que ficará claro mais adiante no curso.

### A.3 Os Sistemas Lagrangeano e Euleriano

As medidas das variações de velocidade de uma corrente oceânica podem ser feitas de duas maneiras distintas: podemos registrar as variações relativas a um referencial fixo, ou podemos fazê-lo relativo a um referencial móvel, que desloca-se junto com a água, seguindo o movimento médio desta.

A primeira maneira é chamada de uma medida euleriana, pois utiliza-se da matemática de **Euler** para descrever o movimento, esta descrita na secção anterior, na qual uma derivada pode ser separada em *local* e *advectiva*. A segunda maneira usa a matemática de Lagrange, segundo a qual o referencial desloca-se junto com o núcleo da corrente, medindo apenas as variações *locais*. Não tem sentido falar em variação advectiva nas medidas lagrangeanas, pois para um referencial que desloca-se junto com a corrente  $u, v$  e  $w$  (médios) são nulos.

Os exemplos mais simples de medidas euleriana e lagrangeana são, respectivamente, um correntógrafo fixo em um ponto registrando valores de corrente ao longo do tempo, e uma bóia de deriva que possa ser seguida por satélite ou rádio, de maneira que possamos saber sua posição em diversos instantes de tempo e traçar sua trajetória. Na figura A.1 mostramos um exemplo teórico de medidas de corrente feitas no oceano Pacífico pelos dois métodos.

### A.4 O operador Nabla ( $\nabla$ )

O operador nabla é um vetor composto de 3 componentes:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}.\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}.\vec{k} \quad (\text{A.9})$$

Figura A.1: *Padrão de correntes no oceano Pacífico descrito pelo métodos a) Lagrangeano e b) Euleriano.*

onde:

$i, j, k$  são os versores nas direções  $x, y, z$ , respectivamente.

O operador nabla quando aplicado a uma grandeza escalar resulta no **gradiente** desta grandeza. Por exemplo  $\vec{\nabla}T$  é o gradiente do campo de temperatura, e representa a variação da temperatura ao longo das três direções do espaço, conforme mostra a equação A.10.

$$\vec{\nabla}T = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \vec{k} \quad (\text{A.10})$$

Cada derivada parcial de  $T$  na equação A.10 representa o gradiente de  $T$  em uma das direções do espaço.

Um outro exemplo de gradiente, muito importante em oceanografia, é o gradiente do campo de pressão. Toda vez que existe um gradiente do campo de pressão no oceano existirá um fluxo contrário ao gradiente, ou seja, a água escoará da maior para a menor pressão. No oceano os gradientes de pressão ocorrem em função de inclinações da superfície do mar (interface ar/mar) ou em função de gradientes do campo de massa. Devido a dificuldade de se encontrar um referencial fixo no mar, pois tanto o fundo como a superfície do mar variam, estes gradientes são medidos em relação às superfícies de mesmo geopotencial <sup>3</sup>.

O operador nabla quando aplicado à velocidade, que é uma grandeza vetorial, resulta no divergente desta grandeza.  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$  é o divergente do campo de velocidade. O divergente da velocidade é definido por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k} \right) \cdot (u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j} + w \cdot \vec{k}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A.11})$$

Na equação A.11  $u, v, w$  são as componentes de  $\vec{V}$  nas direções  $x, y, w$ , respectivamente.

Na prática trabalhamos com o divergente da velocidade separado em horizontal e vertical e consideramos o fluxo como incompressível. Para fluxos incompressíveis, o divergente da velocidade deve ser nulo :  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ , ou seja:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.12})$$

A equação A.12 nos diz que: quando o fluxo é incompressível, as variações de velocidade nas 3 direções devem se somar de modo que se anulem, pois a densidade da água não pode variar em função de compressões ou descompressões causadas por um fluxo convergente ou divergente. Para separarmos a divergência horizontal isolamos na equação A.12 somente as variações horizontais:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A.13})$$

---

<sup>3</sup>superfícies ao longo das quais a gravidade da Terra tem o mesmo valor

A equação A.13 nos diz que as variações horizontais de velocidade são compensadas por variações verticais. As variações horizontais de velocidade são representadas por  $\nabla_H$ :

$$\nabla_H = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{A.14})$$

“Quando o fluxo é divergente na horizontal, isto é,  $\nabla_H \vec{V} > 0$ , deverá haver uma ressurgência na vertical, inversamente, quando o fluxo é convergente na horizontal,  $\nabla_H \vec{V} < 0$ , deverá ocorrer uma subsidência na vertical, e quando  $\nabla_H \vec{V} = 0$  não ocorre nem um nem outro”.

Nos exemplos acima a “aplicação” de  $\vec{\nabla}$  a uma determinada grandeza significa “o produto escalar entre o operador  $\vec{\nabla}$  e a grandeza”. No caso do gradiente temos um produto escalar entre um vetor e um escalar, portanto o resultado é um vetor com três componentes, cada qual representando uma variação parcial desta grandeza em determinada direção. No caso do divergente temos um produto escalar entre dois vetores, portanto o resultado é um escalar.

O campo de uma determinada propriedade pode ser definido como **barotrópico** ou **baroclínico** em função de sua relação com o campo de pressão. Quando uma propriedade apresenta um campo com inclinação diferente do campo de pressão dizemos que esta apresenta uma distribuição baroclínica e quando sua inclinação é a mesma que o campo de pressão dizemos que esta é barotrópica. Fluxos associados a gradientes de massa, por exemplo, podem ser barotrópicos ou baroclínicos, no primeiro caso  $\nabla \rho \times \nabla p = 0$  (onde  $\rho$  é a densidade e  $p$  a pressão), pois se estes dois campos são paralelos o produto vetorial entre eles é nulo, e no segundo caso  $\nabla \rho \times \nabla p \neq 0$ .

A aplicação de  $\vec{\nabla}$  a um campo escalar só pode ser feita através de um produto escalar, mas no caso de um campo vetorial podemos fazê-lo através de um produto vetorial também. A aplicação vetorial de  $\vec{\nabla}$  ao campo de velocidade (expressa na equação A.15) é chamada de **rotacional** da velocidade. Neste caso temos o produto vetorial entre dois vetores, do qual resulta um terceiro vetor. O rotacional é portanto uma grandeza vetorial.

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k} \right) \times (u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j} + w \cdot \vec{k}) = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cdot \vec{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cdot \vec{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \vec{k} \quad (\text{A.15})$$

O rotacional do campo de velocidade é uma grandeza teórica representada através de um vetor normal ao plano em que ocorre determinada circulação e cujo módulo expressa a tendência para que ocorra rotação do campo de velocidade. Esta grandeza teórica é conhecida como vorticidade, e como já foi falado a vorticidade é uma grandeza vetorial.

Ainda em termos de aplicações escalares de  $\vec{\nabla}$  a uma determinada grandeza, podemos ter o **laplaciano** desta grandeza, se aplicarmos  $\vec{\nabla}$  duas vezes. Como exemplo tomamos o laplaciano da temperatura, expresso na equação A.16.

$$\nabla^2 T = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot T = \left( \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k} \right) \cdot T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (\text{A.16})$$

Na equação A.16 os versores  $i, j, k$  não são representados no resultado final, pois estes são eliminados no produto escalar entre  $\vec{\nabla}$  e  $\vec{\nabla}$ . O laplaciano do campo de temperatura é portanto uma grandeza escalar.

Ao aplicarmos o laplaciano a velocidade fazemos o produto escalar com uma grandeza vetorial, portanto o resultado é diferente. Ficamos com o laplaciano de cada uma das componentes de  $\vec{V}$ :

$$\begin{aligned}\nabla^2 \bullet \vec{V} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \bullet (u.\vec{i} + v.\vec{j} + w.\vec{k}) \\ &= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \vec{k}\end{aligned}\quad (\text{A.17})$$

## A.5 Cálculo da velocidade vertical a partir do campo horizontal de corrente

Utilizamos a equação A.13 para inferirmos a velocidade vertical em determinado ponto no oceano, a uma profundidade  $z$ , a partir do campo horizontal de corrente. Para calcular  $w$  em uma profundidade  $-z$  integramos a equação A.13 entre a profundidade  $z_0$  (superfície) e a profundidade  $-z$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A.18})$$

ou seja:

$$\partial w = -\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \partial z \quad (\text{A.19})$$

$$\int_{w(z_0)}^{w(-z)} \partial w = - \int_{z_0}^{-z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \partial z \quad (\text{A.20})$$

Ao resolvermos a integral A.20 consideramos que o divergente horizontal não varia ao longo da direção  $z$ , assim estamos calculando a velocidade vertical no fundo de uma camada superficial de espessura  $z$ , causada por um fluxo horizontal divergente (convergente) que não apresenta variações verticais nesta camada:

$$w(-z) - w(z_0) = -\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot (-z - z_0) \quad (\text{A.21})$$

sendo  $z_0 = 0$ , ficamos com:



$$w(-z) = w(0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right).z \quad (\text{A.22})$$

Normalmente, desprezamos as oscilações da superfície, e assim  $w(0) = 0$ , para podermos calcular a velocidade em uma profundidade  $-z$ .

# Apêndice B

## Equação da vorticidade

### B.1 Derivação da equação da vorticidade

A equação da vorticidade, apresentada na secção 8.3, é aqui derivada com todos os passos do processo de aplicação de  $\nabla$  a equação do movimento. Lembramos então que para obter a equação da vorticidade aplicamos  $\nabla$  vetorialmente a equação do movimento, em sua forma vetorial, a qual está reescrita abaixo.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \bullet \nabla) \vec{V} + 2\Omega \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (\text{B.1})$$

Porém, antes de reiniciar o processo, aplicamos uma identidade vetorial que nos permite reescrever o termo de aceleração advectiva (segundo termo do lado esquerdo da equação acima):

$$(\vec{V} \bullet \nabla) \vec{V} = \zeta_R \times \vec{V} + \nabla \left( \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right)$$

onde  $\zeta_R$  é a vorticidade relativa, definida como  $\zeta_R = \nabla \times \vec{V}$ .

Lembramos também que a aceleração da gravidade,  $\vec{g}$  é um gradiente do potencial gravitacional terrestre, ou seja:

$$\vec{g} = \nabla \Phi$$

onde  $\Phi$  é o potencial gravitacional da Terra.

Assim a equação do movimento pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\zeta}_R \times \vec{V} + 2\Omega \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \left( \Phi - \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (\text{B.2})$$

Fazemos então:

$$\nabla \times \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\zeta}_R \times \vec{V} + 2\Omega \times \vec{V} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \left( \Phi - \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (\text{B.3})$$

ou

$$\begin{aligned} \nabla \times \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) + \nabla \times (\vec{\zeta}_R \times \vec{V}) + \nabla \times (2\Omega \times \vec{V}) = \\ - \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \nabla \times \left( \nabla \left( \Phi - \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) \right) + \nabla \times (\nu \nabla^2 \vec{V}) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Trabalhamos agora termo a termo da equação acima:

Termo 1:

$$\nabla \times \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \nabla \times \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\zeta}_R}{\partial t}$$

No Termo 2, aplicamos outra identidade vetorial, que nos diz que

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \nabla \cdot \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - \vec{B} \nabla \cdot \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}:$$

Assim:

$$\nabla \times (\vec{\zeta}_R \times \vec{V}) = \vec{\zeta}_R \nabla \cdot \vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\zeta}_R - \vec{V} \nabla \cdot \vec{\zeta}_R - (\vec{\zeta}_R \cdot \nabla) \vec{V}$$

Nessa ultima equação o terceiro termo do lado direito é nulo pois  $\nabla$  e  $\vec{\zeta}_R$  são perpendiculares, e portanto seu produto escalar é nulo, o que equivale a dizer que o campo de vorticidade é não divergente.

Assim ficamos com

$$\nabla \times (\vec{\zeta}_R \times \vec{V}) = \vec{\zeta}_R \nabla \cdot \vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\zeta}_R - (\vec{\zeta}_R \cdot \nabla) \vec{V}$$

No termo 3, aplicamos a mesma identidade vetorial, e ficamos com:

$$\nabla \times (2\Omega \times \vec{V}) = 2\Omega \nabla \cdot \vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla)2\Omega - (2\Omega \cdot \nabla)\vec{V}$$

Dado que o campo de vorticidade planetária também é não divergente, e o terceiro termo da identidade vetorial também foi anulado.

Termo 4 (primeiro termo do lado direito da equação B.4):

$$\nabla \times \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p\right) = \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2}$$

Termo 5: esse termo se anula, pois tanto  $\Phi$  como  $|\vec{V}|^2/2$  são grandezas escalares, e portanto seus gradientes,  $\nabla\Phi$  e  $\nabla|\vec{V}|^2/2$ , também o são, e  $\nabla$  aplicado vetorialmente a grandezas escalares é nulo.

Termo 6:

$$\nabla \times (\nu \nabla^2 \vec{V}) = \nu \nabla^2 (\nabla \times \vec{V}) = \nu \nabla^2 \vec{\zeta}_R$$

Nossa equação da vorticidade torna-se então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\zeta}_R}{\partial t} + \vec{\zeta}_R \nabla \cdot \vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\zeta}_R - (\vec{\zeta}_R \cdot \nabla) \vec{V} + 2\Omega \nabla \cdot \vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla) 2\Omega - (2\Omega \cdot \nabla) \vec{V} = \dots \\ + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nu \nabla^2 \vec{\zeta}_R \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Na equação B.5 o primeiro e o terceiro termos do lado esquerdo são, respectivamente, as porções local e advectiva do termo de derivada total de  $\zeta_R$  e portanto serão combinados numa derivada total:

$$\begin{aligned} \frac{d \vec{\zeta}_R}{dt} + \vec{\zeta}_R \nabla \cdot \vec{V} - (\vec{\zeta}_R \cdot \nabla) \vec{V} + 2\Omega \nabla \cdot \vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla) 2\Omega - (2\Omega \cdot \nabla) \vec{V} = \dots \\ + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nu \nabla^2 \vec{\zeta}_R \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Agora a segundo e o quarto termos são combinados num único termo, e também o terceiro e o quinto termos são combinados num único termo:

$$\frac{d\vec{\zeta}_R}{dt} + (\vec{\zeta}_R + 2\Omega)\nabla \cdot \vec{V} - ((\vec{\zeta}_R + 2\Omega) \cdot \nabla)\vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla)2\Omega = +\frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nu\nabla^2\vec{\zeta}_R \quad (\text{B.7})$$

ou

$$\frac{d\vec{\zeta}_R}{dt} + \vec{\zeta}_a \nabla \cdot \vec{V} - (\vec{\zeta}_a \cdot \nabla)\vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla)2\Omega = +\frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nu\nabla^2\vec{\zeta}_R \quad (\text{B.8})$$

ou

$$\frac{d\vec{\zeta}_R}{dt} = +(\vec{\zeta}_a \cdot \nabla)\vec{V} - \vec{\zeta}_a \nabla \cdot \vec{V} - (\vec{V} \cdot \nabla)2\Omega + \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nu\nabla^2\vec{\zeta}_R \quad (\text{B.9})$$

A qual é finalmente a nossa equação da vorticidade.

# Apêndice C

## Revisão da Teoria de Onda

Uma onda de gravidade é uma onda que ocorre no mar toda vez que a superfície do oceano (ou a piconclina, no caso de ondas internas) é perturbada e retirada do seu estado de repouso. A superfície passa então a oscilar com período definido. Ondas de diversos comprimentos e períodos existem, mas em geral as mais comuns são aquelas geradas por vento, cujo período varia entre poucos segundos e poucos minutos.

Essas ondas tem algumas características, ou parâmetros, que as distinguem umas das outras. Esses parâmetros são descritos abaixo.

### C.1 Parâmetros de onda

Toda onda pode ser descrita como um movimento que apresenta uma amplitude e uma fase. A amplitude da onda de gravidade é o deslocamento vertical que cada partícula de água descreve ao passar da onda. A fase é o estágio em que a partícula se encontra em um determinado momento, ou seja, subindo ou descendo, ou em outras palavras, na crista ou no cavado da onda. A distância entre dois pontos de mesma fase é o que chamamos de comprimento da onda, representado por  $\lambda$ . O tempo que um ponto de mesma fase demora para se repetir é dito o período da onda,  $T$ .

A velocidade com que pontos de mesma fase se deslocam é dita velocidade de propagação de fase, ou simplesmente, velocidade de fase,  $c$ . Assim, se ficarmos parado no mar, vendo as cristas das ondas passarem, o período delas será o tempo que demora entre uma crista e outra. O comprimento da onda é distância entre duas cristas, e a velocidade de fase é a velocidade com que as cristas se aproximam de nós.

O inverso do período da onda é sua frequência, sendo representada por  $\omega$ .

$$\omega = 2\pi/T$$

E o inverso do comprimento da onda é o número de onda, representado por  $K$ .

$$K = 2\pi/\lambda.$$

O número de onda é um vetor que é normal as linhas de mesma fase e aponta na direção de propagação de fase. Veja a figura C.1. No caso de uma onda de gravidade de superfície, esse vetor tem duas componentes, que são suas projeções nos eixos  $x$  e  $y$ . Essas componentes são  $k$  e  $l$ .

$\vec{K} = k.\vec{i} + l.\vec{j}$ , onde  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  são os versores que identificam os eixos coordenados  $x$  e  $y$ .

O módulo de  $\vec{K}$  é dado por:

$$|\vec{K}| = \sqrt{k^2 + l^2} \text{ ou } K^2 = k^2 + l^2.$$

A velocidade de fase,  $c$ , é calculada em função do número de onda e da frequência da onda, e portanto relacionada ao período da onda com seu comprimento.

$$c = \frac{\omega}{K} = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{T} \quad (\text{C.1})$$

E portanto tem unidade de  $m/s$ .

As componentes de  $c$  nos eixos coordenados  $x$  e  $y$  são:  $c_x = \frac{\omega}{k}$  e  $c_y = \frac{\omega}{l}$

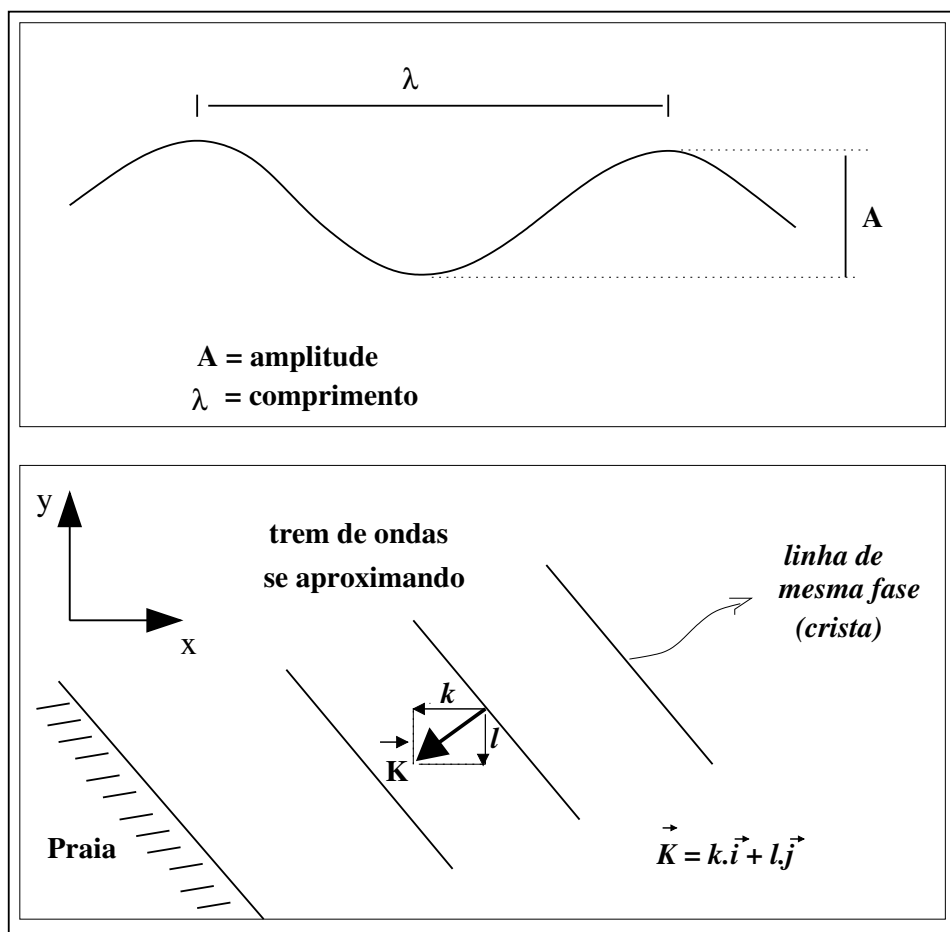


Figura C.1: Desenho esquemático de uma onda de gravidade mostrando os parâmetros de onda. Vista Lateral (painel superior) e vista superior (painel inferior).